

Exercices

Sébastien Tran Tien

12 mai 2026

Table des matières

1	Préambule	4
1.1	Utilisation	4
1.2	Provenance des exercices	4
2	Première année	5
2.1	Dénombrement et groupe symétrique	5
2.2	Nombres complexes	6
2.2.1	Exercices non géométriques	6
2.2.2	Utilisation des nombres complexes en géométrie	7
2.3	Ensembles et applications	7
2.4	Arithmétique	8
2.5	Polynômes	8
2.6	Fractions rationnelles	9
2.7	Nombres réels : borne inférieure, borne supérieure	10
2.8	Algèbre linéaire	10
2.8.1	Espaces vectoriels, sous-espaces	10
2.8.2	Applications linéaires	12
2.8.3	Matrices	15
2.8.4	Déterminant et trace	16
2.8.5	Résolution de systèmes linéaires	18
2.9	Généralités sur les suites	19
2.10	Fonctions d'une variable réelle	20
2.10.1	Calculs de limites	20
2.10.2	Partie entière	21
2.10.3	Continuité	21
2.10.4	Dérivabilité	22
2.10.5	Fonctions usuelles et études de fonctions	26
2.11	Intégration sur un segment	29
2.11.1	Généralités	29
2.11.2	Sommes de Riemann	31
2.11.3	Calcul de primitives	31
2.12	Equation différentielles scalaires d'ordre 1 et 2	32
2.13	Analyse asymptotique	33
3	Deuxième année	36
3.1	Intégration	36
3.1.1	Nature de l'intégrale, calcul d'intégrales	36
3.1.2	Intégration des relations de comparaison	38
3.1.3	Exercices théoriques	39
3.1.4	Intégrale fonction des bornes	39

3.1.5	Intégrales à paramètre	40
3.1.6	Convergence dominée et sommation L^1	44
3.2	Séries numériques	46
3.3	Familles sommables	51
3.4	Convexité	52
3.5	Espaces vectoriels normés	54
3.5.1	Normes	54
3.5.2	Continuité	56
3.5.3	Distance à un sous-espace	56
3.5.4	Ouverts, fermés, densité	57
3.5.5	Compacité	59
3.5.6	Continuité linéaire	60
3.5.7	Connexité par arcs	62
3.5.8	Exponentielles d'endomorphismes	62
3.6	Espaces préhilbertiens	63
3.6.1	Produit scalaire, orthogonal et base orthonormée concrets	63
3.6.2	Un peu plus théoriques	64
3.6.3	Calcul d'infimum par distance à un sous-espace	68
3.7	Suites et séries de fonctions	69
3.7.1	Suites de fonctions	69
3.7.2	Séries de fonctions	72
3.7.3	Suites et séries de fonctions, contre-exemples	76
3.8	Séries entières	76
3.8.1	Rayon de convergence, éventuellement calcul de la somme.	76
3.8.2	Calcul de DSE	78
3.8.3	Equation différentielle	78
3.8.4	Autres	79
3.9	Probabilités	80
3.9.1	Probabilités	80
3.9.2	Variables aléatoires	84
3.9.3	Fonctions génératrices	88
3.10	Algèbre générale	90
3.10.1	Groupes	90
3.10.2	Anneaux, idéaux, algèbres	91
3.11	Réduction	94
3.11.1	Éléments propres, polynôme caractéristique	94
3.11.2	Diagonalisabilité, trigonalisabilité	96
3.11.3	Fin, avec polynômes d'endomorphismes	99
3.12	Espaces euclidiens	102
3.12.1	Généralités et endomorphismes/matrices orthogonaux	102
3.12.2	Endomorphismes/matrices symétriques réels; théorème spectral	105
3.13	Réduction d'isométries ($d = 2, 3$) et coniques	106
3.14	Calcul différentiel	107
3.14.1	Continuité	107
3.14.2	Différentiabilité et calculs de différentielles	108
3.14.3	Extremas	108
3.14.4	EDP	109
3.14.5	Tout le reste	109
3.15	Équations différentielles	113
3.15.1	Pratique	113

3.15.2	Exercices pratiques plus approfondis	114
3.15.3	Théoriques	115
3.15.4	Wronskien et Grönwall	117
3.15.5	Cas général ou équations non linéaires (HP)	118
3.16	Courbes et surfaces	119
3.16.1	Géométrie dans le plan, courbes	119
3.16.2	Surfaces	120
3.17	Inclassables, planches d'oraux ou Python	120

Chapitre 1

Préambule

1.1 Utilisation

Signification des symboles :

- 🏁 pour les exercices rapides de fin de colle.
- 📝 pour les exercices à tester.
- 🏆 pour les exercices dont je suis content.
- HP = hors programme de CPGE années ~ 2018.

Pour la version avec/sans solutions, version colleur complète avec remarques et références ou le fichier tex : demande par mail à sebastien.trantien@gmail.com

1.2 Provenance des exercices

Ce fichier est une compilation d'exercices provenant de diverses sources citées en bibliographie, ainsi que de planches d'oraux (RMS, BEOS, sources personnelles). Je ne m'approprié donc en aucun cas le travail d'autrui, et ce fichier constitue uniquement une banque d'exercices compilant du contenu que l'on peut trouver en ligne.

Certains exercices ont cependant été réécrits à ma sauce. Les exercices sont tous corrigés. Les corrections sont de moi pour la plupart d'entre elles.

Chapitre 2

Première année

2.1 Dénombrement et groupe symétrique

Exercice 1

On considère un rectangle de longueur n et de largeur 2. Déterminer P_n le nombre de façons de paver le rectangle avec des dominos 2×1 .

Exercice 2

Soit $n, k \in \mathbf{N}^*$.

1. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de $\{1, \dots, n\}$ en k parties.
Dans la suite, on notera $S(n, k)$ le nombre de telles partitions. On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.
2. Que vaut $S(n, k)$ pour $k > n$?
3. Que vaut $S(n, 1)$?
4. Démontrer que $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.
5. En déduire un algorithme pour calculer $S(n, k)$.

Exercice 3

On note, pour $n, p \in \mathbf{N}^*$, $S(n, p)$ le nombre de surjections de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, p\}$.

1. (a) Calculer $S(n, p)$ pour $p > n$.
(b) Calculer $S(n, n)$.
(c) Calculer $S(n, 1)$.
(d) Calculer $S(n, 2)$.
2. Calculer $S(n+1, n)$.
3. Démontrer que, pour $n, p > 1$, nous avons :

$$S(n, p) = p(S(n-1, p) + S(n-1, p-1))$$

4. Démontrer que, pour $n, p \geq 1$, on a :

$$S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

Exercice 4

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \mathbf{N}$, on note Γ_n^p le nombre de n -uplets (x_1, \dots, x_n) d'entiers naturels tels que $x_1 + \dots + x_n = p$.

1. Déterminer $\Gamma_n^0, \Gamma_n^1, \Gamma_n^2, \Gamma_1^p$ et Γ_2^p .
2. Démontrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \mathbf{N}$,

$$\Gamma_{n+1}^p = \Gamma_n^0 + \Gamma_n^1 + \dots + \Gamma_n^p$$

3. En déduire que

$$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Exercice 5: Centre du groupe symétrique

Soit $n \geq 3$.

1. Pour $i \neq j$ dans $\{1, \dots, n\}$ et $\sigma \in S_n$, calculer $\sigma \circ (ij) \circ \sigma^{-1}$.
2. En commençant par considérant les transpositions de la forme $(1i)$, déterminer le centre de S_n , c'est-à-dire l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ qui commutent avec toutes les autres.

Exercice 6

Soit $n \geq 3$.

1. Montrer que deux transpositions de S_n sont toujours conjuguées.
2. Déterminer les morphismes de groupe de (S_n, \circ) dans (\mathbf{C}^*, \cdot) .

2.2 Nombres complexes

2.2.1 Exercices non géométriques

Exercice 7

Soit $p \geq 0$. Montrer qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour tous $a, b \in \mathbf{C}$,

$$|a + b|^p \leq C_p(|a|^p + |b|^p).$$

Exercice 8

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Trouver module et argument de $z = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$.

Exercice 9: [Fab, Complexes p. 5]

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

Exercice 10: [Fab, Complexes p. 5]

Soit $z \in \mathbf{C}$ de module 1. Montrer que $|1 + z| \geq 1$ ou $|1 + z^2| \geq 1$.


Exercice 11

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note \mathbf{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes complexes de l'unité.


1. Rappeler l'expression des éléments de \mathbf{U}_n .
2. Calculer

$$\sum_{z \in \mathbf{U}_n} |z - 1|$$

3. En déduire la valeur de $\tan(\pi/8)$.

Exercice 12: [Mon08, p. 36]  Compréhension du sup

Déterminer $\sup_{|z| \leq 1} |z^3 + 2iz|$.

Exercice 13: 

Quelle est l'image du cercle unité privé de 1 par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 14: (DupXSupp1)

Soit $n \geq 3$ et $\omega_1, \dots, \omega_n$ les racines n -ièmes de l'unité avec $\omega_n = 1$.

1. Calculer, pour $p \in \mathbf{Z}$,

$$S_p = \sum_{k=1}^n \omega_k^p$$

2. Calculer

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega_k}$$

2.2.2 Utilisation des nombres complexes en géométrie ...**Exercice 15: [Fab, Complexes p. 6]**

Soit A et B deux points distincts du plan. Soit s_O une similitude directe de centre l'origine O . On note $A' = s_O(A)$ et $B' = s_O(B)$.

On considère, de plus, s_A une similitude directe de centre A telle que $s_A(B) = B'$, et s_B une similitude directe de centre B telle que $s_B(A) = A'$. On note $P = s_A(O)$ et $Q = s_B(O)$.

Montrer que P et Q sont symétriques par rapport à O .

2.3 Ensembles et applications

Exercice 16

Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. $\forall X \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(X)) = X$
3. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$
4. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = \emptyset$
5. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), Y \subset X \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$

2.4 Arithmétique**Exercice 17**

Soit $a, b \geq 2$ des entiers premiers entre eux. Montrer que $\frac{\ln a}{\ln b}$ n'est pas rationnel.

Exercice 18

Soit $a, b \in \mathbf{Q}$ tels que $a + b$ et ab soient des entiers. Montrer que a et b sont des entiers.

2.5 Polynômes**Exercice 19**

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On suppose que $a \in \mathbf{R}$ vérifie

$$P(a) > 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbf{N}^*, P^{(k)}(a) \geq 0.$$

Montrer que le polynôme P ne possède pas de racines dans $[a; +\infty[$.

Exercice 20

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que :

1. $P(X^2 + 1) = P$
2. $P(2X + 1) = P$
3. $P(X^2) = (X^2 + 1)P$

Exercice 21

Condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 22

On pose $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. Déterminer une relation de Bézout entre A et B .

Exercice 23

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
2. En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
3. On note $P^{[n]} = P \circ \dots \circ P$ (composition à $n \geq 1$ facteurs). Établir que $P(X) - X$ divise $P^{[n]}(X) - X$.

Exercice 24: [GouAI]

Dans cet exercice, on fixe $p \in \mathbf{N}^*$, n_1, \dots, n_p et $n = \sum_{i=1}^p n_i$.

1. Soit \mathbf{K} un corps commutatif et $x_1, \dots, x_p \in \mathbf{K}$, deux à deux distincts. On se donne une famille d'éléments de \mathbf{K} notée $(y_{i,k})_{1 \leq i \leq p, 0 \leq k < n_i} \in \mathbf{K}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall k \in \{0, \dots, n_i - 1\}, \quad P^{(k)}(x_i) = y_{i,k}.$$

2. Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n . On considère p points $x_1 < \dots < x_p$ de I . Si P est le polynôme dit d'interpolation de Hermite de degré $< n$ vérifiant

$$P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p \text{ et } 0 \leq k < n_i,$$

le but de cette question est de montrer que :

$$\forall x \in I, \exists \tilde{\zeta} \in I, \quad f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(\tilde{\zeta})}{n!} \prod_{i=1}^p (x - x_i)^{n_i}.$$

- (a) Traiter le cas où $x = x_i$ pour un certain $i \in \{1, \dots, p\}$
- (b) Sinon, on pose

$$\varphi_x(t) = f(t) - P(t) - A \prod_{i=1}^p (t - x_i)^{n_i}$$

où le réel A est tel que $\varphi_x(x) = 0$. Enfin, pour g fonction de classe \mathcal{C}^n sur I , on note $N(g)$ le nombre de zéros de g comptés avec multiplicités.

- i. Justifier que pour toute fonction g , on a $N(g) \geq N(g') - 1$.
- ii. Justifier que $N(\varphi_x) \geq n + 1$.
- iii. En déduire que $N(\varphi_x^{(n)}) \geq 1$ et conclure.

Exercice 25: Polynômes de Tchebycheff

Avec Gourdon 12 p.96.

2.6 Fractions rationnelles

Exercice 26

Décomposer en éléments simples :

1. dans $\mathbf{C}(X)$, la fraction :

$$\frac{X^4}{X^5 + 1}$$

Exercice 27

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ scindé. Montrer que $x \mapsto P''(x)P(x) - (P'(x))^2$ est de signe constant sur \mathbf{R} .

2.7 Nombres réels : borne inférieure, borne supérieure**Exercice 28**

Soit $A \subset \mathbf{R}$ donnée par :

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1}; (m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2 \right\}.$$

Montrer que A admet une borne inférieure, une borne supérieure, et les calculer. A admet-elle un minimum? Un maximum?

2.8 Algèbre linéaire**2.8.1 Espaces vectoriels, sous-espaces****Exercice 29**

On pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 .
2. Déterminer une base de F
3. Déterminer un supplémentaire de F dans \mathbf{R}^3

Exercice 30

On pose

$$F = \{(x, y, x + y, 2x + y); (x, y) \in \mathbf{R}^2\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^4 .
2. Déterminer une base de F .
3. Déterminer un supplémentaire de F dans \mathbf{R}^4 .

Exercice 31

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que F et G ont un vecteur non nul en commun.

Exercice 32: [Mon08, p. 287]

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
Montrer que :

$$(\dim(F + G))^2 + (\dim(F \cap G))^2 \geq (\dim(F))^2 + (\dim(G))^2$$

Et étudier le cas d'égalité.

Exercice 33: [Mon08, p. 286]

On note E le \mathbf{R} -espace vectoriel des applications de \mathbf{R} dans \mathbf{R} et

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$$

et enfin, $G = E \setminus F$ le complémentaire de F .

1. F est-il un sous-espace vectoriel de E ? G est-il un sous-espace vectoriel de E ? Justifier la réponse.
2. Montrer que pour tout $g \in G$, $\text{Vect}(g)$ est un supplémentaire de F dans E .

Exercice 34: [Mon08, p. 286]

On note E le \mathbf{R} -espace vectoriel des applications classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} et

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0, f(0) = 0, f'(1) = 0 \right\}$$

et enfin, pour $k \in \{0, 1, 2\}$, $e_k : x \mapsto x^k$ et

$$G = \{a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3\}$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Exercice 35: [Bal09, p. 357, sp. 385]

On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'ensemble des applications de \mathbf{R} dans \mathbf{R} indéfiniment dérivables sur \mathbf{R} . Soit a_1, \dots, a_n des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que la famille $(f_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$, avec

$$f_k : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \exp(a_k x) \end{cases}$$

est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$

2. On suppose, de plus, que les a_k sont strictement positifs. Montrer que la famille $(g_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$, avec

$$g_k : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(a_k x) \end{cases}$$

est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$

Exercice 36: Le même, pour interroger sur le Vandermonde

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et a_1, \dots, a_n des réels deux à deux distincts. Montrer que la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$, avec

$$f_k : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \exp(a_k x) \end{cases}$$

est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.

(On pourra annuler une combinaison linéaire puis, en dérivant, se ramener à un Vandermonde)

2.8.2 Applications linéaires**Dimension quelconque****Exercice 37: Préparatoire au théorème du rang**

1. Si E est un espace vectoriel et $E = F \oplus G$ alors pour toutes $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(F) \times \mathcal{L}(G)$ il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f|_F = \varphi$ et $f|_G = \psi$ (où $|$ désigne dans cet exercice seulement la biresstriction).
2. Soit E et F des espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $\ker f$ admet un supplémentaire G dans E . Montrer que G est isomorphe à $\text{Im}(f)$.

Exercice 38

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que si G et G' sont deux supplémentaires de F dans E , alors G et G' sont isomorphes.
2. Montrer que la réciproque est fautive

Exercice 39

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et φ_1, φ_2 deux formes linéaires non nulles sur E .

Montrer que $\ker(\varphi_1) \subset \ker(\varphi_2)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\varphi_2 = \lambda\varphi_1$, et que, dans ce cas, on a en fait $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$.

Exercice 40

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et soit $f, g \in E^*$ non nulles. Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et $g(u) = 0$.

Exercice 41

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est un projecteur. Montrer que u et v commutent si et seulement si $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

Exercice 42

Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent, c'est-à-dire tel qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$.

Montrer que $\text{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .

Exercice 43

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E qui stabilise toute droite de E .
Montrer que u est une homothétie.

Dimension finie, lien avec les matrices**Exercice 44**

On définit l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X])$ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad f(P) = P + (1 - X)P'$$

Déterminer le noyau de f .

Exercice 45: [Mon08, p. 311]

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et a_0, \dots, a_n des réels. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto (P(a_0), P'(a_1), \dots, P^{(n)}(a_n)) \end{cases}$$

Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 46: Symétries, projections

1. Expression analytique de la symétrie par rapport à $\mathbf{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ parallèlement à $\mathbf{R} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$
2. Matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ parallèlement à la droite engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.
3. Matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ parallèlement à $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y = z\}$

Exercice 47: [Rou15, p. 176]

Soit

$$p : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) \end{cases}$$

1. Montrer que p est un endomorphisme de \mathbf{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de \mathbf{R}^3 .
3. Déterminer une base de $\ker(p)$ et une base de $\text{Im}(p)$. L'application p est-elle injective? surjective? Est-ce un automorphisme de \mathbf{R}^3 ?
4. Montrer que $\ker(p) \oplus \text{Im}(p) = \mathbf{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de $p \circ p$ dans la base canonique de \mathbf{R}^3 . Que conclure?

Exercice 48: [Rou15, p. 177]

Soit

$$s : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (-2x - 3y, x + 2y, 2x + 2y + z) \end{cases}$$

1. Montrer que s est un endomorphisme de \mathbf{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de s dans la base canonique de \mathbf{R}^3 .
3. Déterminer $\ker(s)$ et $\text{Im}(s)$. L'application s est-elle injective? surjective? Est-ce un automorphisme de \mathbf{R}^3 ?
4. Déterminer la matrice de $s \circ s$ dans la base canonique de \mathbf{R}^3 . Que conclure?

Exercice 49: BEOS 3235 CCP PC 2017

Soit f un endomorphisme d'un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie n .
On suppose que f est de rang 1 et que f^2 n'est pas l'endomorphisme nul.

1. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans E .
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 50: BEOS 7698 CCINP MP 2022Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

1. Soit p un projecteur de E . Montrer que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.
2. On donne n endomorphismes non nuls u_1, \dots, u_n de E tels que :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, u_i \circ u_j = \delta_{i,j} u_i.$$

Montrer que les sous-espaces $\text{Im}(u_i)$ sont en somme directe.

3. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\text{rg}(u_i) = 1$.
4. Montrer que :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \text{Id}_E.$$

Exercice 51

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$
2. Montrer que $\ker(f) = \mathbf{R}_0[X]$
3. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \mathbf{R}_{n-1}[X]$ puis montrer l'égalité $\text{Im}(f) = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer que f est nilpotent.
5. On considère maintenant f comme un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$. Est-il surjectif? Injectif?

Exercice 52: [Riv78, p. 69] Endomorphismes de carré nul

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie n , et f un endomorphisme de E . On note r le rang de f .

1. Montrer que

$$f^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \ker(f)$$

Quelle inégalité vérifie le rang de f ?

2. Soit E_1 un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E . Montrer que f induit un isomorphisme de E_1 sur $\text{Im}(f)$.
3. On suppose désormais que $f^2 = 0$.
Soit (e_1, e_2, \dots, e_r) une base de E_1 . Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_r, f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $E_1 \oplus \text{Im}(f)$.
4. On complète $(e_1, \dots, e_r, f(e_1), \dots, f(e_r))$ (si nécessaire) par des vecteurs de $\ker(f)$ de façon à obtenir une base de E . Quelle est la matrice de f dans la base obtenue ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{Im}(f) = \ker(f)$.
6. (Exemple) Soit f l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Montrer que $f^2 = 0$ puis déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f est

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.8.3 Matrices**Exercice 53**

Montrer que P est inversible et donner son inverse, où :

- 1.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

- 2.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 3.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 54

Déterminer l'image de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 55: ☉

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = I_n$.
A-t-on nécessairement $BA = I_n$?

Exercice 56

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. Déterminer $\text{rg } A$ en fonction de $\text{rg } \text{com} A$.
2. Résoudre l'équation $A = \text{com}(A)$.

Exercice 57

Montrer que, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2.8.4 Déterminant et trace**Exercice 58**

Calculer, pour $a, b, c \in \mathbf{R}$, le déterminant suivant sous forme factorisée :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 59

Soit $a, b \in \mathbf{R}$. Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 60: Déterminant de Vandermonde

1. Première méthode : par récurrence directe

Exercice 61

1. Vérifier que $(1, i)$ est une base du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{C} .

Pour $a, b \in \mathbf{C}$, on note $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{C} donné par :

$$\varphi_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$$

2. Déterminer la matrice dans la base $(1, i)$ de $\varphi_{a,b}$.

3. (a) En déduire que, pour tout f endomorphisme du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{C} , il existe un unique $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ tel que $f = \varphi_{a,b}$.

(b) Exprimer en fonction de a et b le déterminant de $\varphi_{a,b}$.

Exercice 62

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de rang 1. Montrer que $\det(I_n + A) = 1 + \text{tr}(A)$.

Exercice 63

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Le but est de montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \det(A + xJ) = \det(A).$$

On pose pour cela $f : x \mapsto \det(A + xJ)$.

1. Montrer que f est paire
2. Montrer que f est affine.
3. Conclure.

Exercice 64

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbf{Z} . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur M pour que M soit inversible et que $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$.

Exercice 65

Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \det(A + B) = \det(A) + \det(B) \quad (*)$$

Exercice 66

Soit $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . On se donne E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ et on fixe $u \in \mathcal{L}(E)$.
On fixe \mathcal{B} une base de E .

On note $f_u : E^n \rightarrow K$ l'application donnée par :

$$f_u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Montrer que $f_u = \text{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$.

Exercice 67: [Mon09, p. 393, sp. 403]

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $AB = BA$ et $p, q \in \mathbf{R}$ tels que $p^2 - 4q \leq 0$. Montrer que

$$\det(A^2 + pAB + qB^2) \geq 0$$

Exercice 68

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'équation :

$$X = \text{tr}(X)A + B$$

Exercice 69

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit p un projecteur de E . Donner une relation entre la trace et le rang de p .
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

Montrer que

$$f^2 = \text{tr}(f)f$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f) = \text{tr}(f) = 1$. Montrer que f est un projecteur.

2.8.5 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 70: [Rou15, p. 98]

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1.

$$\begin{cases} x + 2y + 8z - 7t = -2 \\ 3x + 2y + 12z - 5t = 6 \\ -x + y + z - 5t = -10 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y - 5z = 0 \\ 4x - y + z = 3 \\ x + 3y - 13z = -6 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 10 \\ 2x - y + z - t = 1 \\ 3x + y + 4z + 3t = 11 \\ -2x + 6y + 4z + 10t = 18 \end{cases}$$

2.9 Généralités sur les suites**Exercice 71**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 + 1} = ?$$

Exercice 72

Rappeler une façon de voir que la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 73

Rappeler pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbf{R}$ les suites $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ divergent, et le redémontrer.

Exercice 74

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0, 1]$.

Montrer que, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

Exercice 75: [Bal09, p. 218][Ram, p. 3][Gou08, p. 198] Moyenne arithmético-géométrique

Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = a, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_0 = b, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Etudier ces deux suites.

Exercice 76: [Lar12, p. 88, sp. 107] avec un peu de séries pour la forme

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$$

1. Vérifier que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Etablir : $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$ et en déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} \geq 2\sqrt{n}$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $v_n = |u_n - n|$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et u_n et en déduire que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
4. En déduire un équivalent simple de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.
5. Quelle sont les natures des séries $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{u_n}$ et $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{\sqrt{u_n}}$?

Exercice 77: [Ram, p. 2] application de Cesaro

On considère $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites numériques convergentes, de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 . On pose pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k v_{n-k+1}$$

1. On suppose $\ell_1 = \ell_2 = 0$. Etudier la convergence de (w_n) .
2. On ne suppose plus $\ell_1 = \ell_2$. Etudier la convergence de (w_n) .

Exercice 78: [Bal09, p. 221]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite numérique dont les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(u_{n^2})_{n \in \mathbf{N}}$ convergent. Que dire de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$?

2.10 Fonctions d'une variable réelle**2.10.1 Calculs de limites**

Exercice 79

Calculer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

2.10.2 Partie entière**Exercice 80**

1. Exprimer, pour $x \in \mathbf{R}$, $[2x]$ en fonction de $[x]$.
2. Pour $x \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{Z}$, calculer $[x + k]$.
3. Résoudre sur \mathbf{R} l'équation $[2x + 1] = [x + 4]$.

Exercice 81

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. On note $S = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$.

1. Montrer que S est un entier pair.
2. Montrer que :

$$S - 1 \leq (2 + \sqrt{3})^n < S$$

3. En déduire que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est impaire.

2.10.3 Continuité**Pratique****Exercice 82**

Etudier la continuité sur \mathbf{R} de la fonction f donnée par :

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}.$$

On commencera par justifier que f est bien définie sur \mathbf{R} ...

Exercice 83

Étudier la continuité de la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \sup \left\{ \frac{x^n}{n!}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Théorique**Exercice 84**

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ bornée et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue.

Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 85

Soient $a < b \in \mathbf{R}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction strictement croissante. Montrer que f est continue si, et seulement si,

$$f\left(]a, b[\right) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[.$$

Exercice 86

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 2$, il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 87

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On se donne $x_0 \in \mathbf{R}$ et on définit la suite (x_n) par récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

On suppose que (x_n) admet une unique valeur d'adhérence. Montrer que (x_n) converge.

Exercice 88

Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x > 0, \quad f(nx) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Montrer que f est de limite nulle en $+\infty$.

2.10.4 Dérivabilité**Exercice 89**

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable et bornée. On suppose que f' admet une limite finie $\ell \in \mathbf{R}$ quand $x \rightarrow +\infty$. Déterminer ℓ .

Exercice 90: Théorème de Darboux par le TVI

Montrer que toute fonction dérivée satisfait le théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable et si y_0 est compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = y_0$.

Exercice 91: Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein, cas lipschitzien

Le but est de montrer partiellement le théorème suivant (dit de Weierstrass) :

Toute fonction f continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes

Dans le cas, plus simple, où f est carrément de classe \mathcal{C}^1 (lipschitzienne suffirait).

1. Soit $n, k \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

(a) Montrer les trois identités suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1, \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx, \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2. \quad (2.3)$$

(b) Dédurre des questions précédentes que :

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. On cherche ici à majorer la somme

$$S(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

On note V (resp. W) l'ensemble des entiers $k \in \{0, \dots, n\}$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ (resp. $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$), et on pose

$$S_V(x) = \sum_{k \in V} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{et} \quad S_W(x) = \sum_{k \in W} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrer que $S_V(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, $S_W(x) \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$ et, enfin, en déduire que $S(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

3. Pour $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on définit le n -ième polynôme de Bernstein de f , noté $B_n(f)$, par :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

(a) Dans la suite, f désigne un élément de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. Montrer que f est lipschitzienne, et que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

(b) Montrer qu'il existe un réel c tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on ait :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

et conclure

Exercice 92: Méthode de Newton, convergence linéaire

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$. On suppose $b - a \leq 1$.

On note

$$F : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

1. (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$
- (b) Montrer que $|f''|$ admet un maximum sur $[a, b]$ et que $\min_{x \in [a, b]} f'(x) > 0$

On note $C = \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{\min_{x \in [a, b]} f'(x)}$. On suppose $C < 2$.

- (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$:

$$|F(x) - \alpha| \leq \frac{C}{2} |x - \alpha|$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = F(u_n)$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers α .

Exercice 93: Méthode de Newton, convergence quadratique

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$. On suppose $b - a \leq 1$.

On note

$$F : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

1. (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$
- (b) Montrer que $|f''|$ admet un maximum sur $[a, b]$ et que $\min_{x \in [a, b]} f'(x) > 0$

On note $C = \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{\min_{x \in [a, b]} f'(x)}$.

- (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$:

$$|F(x) - \alpha| \leq \frac{C}{2} |x - \alpha|^2$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = F(u_n)$.

On suppose que l'on prend u_0 assez proche de α , au sens où $|u_0 - \alpha| < \frac{2}{C}$.

Montrer qu'alors $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers α .

Exercice 94: Méthode de Newton avec égalité de Taylor-Lagrange (HP)

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$. On suppose $b - a \leq 1$.

On note

$$F : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

1. (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$
- (b) Montrer que $|f''|$ admet un maximum sur $[a, b]$ et que $\min_{x \in [a, b]} f'(x) > 0$

On note $C = \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{\min_{x \in [a, b]} f'(x)}$. On suppose $C < 2$.

- (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel $z \in [\min(\alpha, x), \max(\alpha, x)]$ tel que

$$F(x) - \alpha = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x - \alpha)^2$$

En déduire que

$$\forall x \in [a, b], \quad |F(x) - \alpha| \leq \frac{C}{2} |x - \alpha|$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = F(u_n)$.
 - (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers α .
 - (b) Montrer que $u_{n+1} - \alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} (u_n - \alpha)^2$

2.10.5 Fonctions usuelles et études de fonctions**Exercice 95**

Soit $a > 0$ un nombre réel tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, a^x \geq x + 1$$

Montrer que $a = e$.

Exercice 96

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par :

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbf{R}_+ sur un intervalle I à préciser.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et montrer que, pour tout y dans ce domaine,

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}.$$

Exercice 97

Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

Exercice 98

Déterminer l'ensemble de validité de la formule suivante et la prouver :

$$2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 99: [Bal09, p. 229] Formule de Stirling en admettant Wallis

Le but de cet exercice est d'établir $n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

1. (a) Soit Φ la fonction définie par

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x$$

Montrer que Φ est positive sur $[0, 1[$.

- (b) Soit ψ la fonction définie par

$$\psi(x) = \Phi(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

Montrer que ψ est négative sur $[0, 1[$. En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

- (c) En considérant la suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{1}{2n+1}$, déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$0 \leq \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

2. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}$$

et

$$b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}}$$

- (a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes, et que leur limite commune ℓ est strictement positive.

- (b) Justifier que, pour les grandes valeurs de n , $\frac{1}{\ell} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ peut être considéré comme une expression approchée de $n!$.

3. On donne la formule de Wallis :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\prod_{k=1}^n 2k)^2}{n (\prod_{k=1}^n (2k-1))^2} = \pi$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

et en déduire que $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Exercice 100: [Bal09, p. 885, sp. 904]

On pose $f : x \mapsto (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . On le note D_f . Vérifier que f est dérivable en tout point de D_f , et y calculer sa dérivée f' .
2. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. f est-elle prolongeable par continuité en $-\frac{\pi}{2}$?
On note \tilde{f} le prolongement de f à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
4. Montrer que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Exercice 101

Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ continue. On note $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité.

1. Montrer qu'il existe z et z' dans \mathbf{U} diamétralement opposés tels que $f(z) = f(z')$
2. Montrer qu'il existe z et z' dans \mathbf{U} se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que $f(z) = f(z')$

Exercice 102

Idées d'autres exercices :

1. Grönwall, par exemple majorer $|y(t)|$ si $|y'(t)| \leq \alpha|y(t)|$, en déduire que si l'EDO $y' = F(t, y)$ admet une (des) solutions sur $[0, T]$ avec F globalement lipschitz en y , alors deux solutions associées à la même condition initiale sont égales sur $[0, T]$.
2. Montrer que $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ (avec obligatoirement le théorème de limite de la dérivée; cet exercice est forcément fait dans leur cours mais c'est juste pour vérifier).
3. L'exercice de la section équations différentielle du type $y' + ay \rightarrow 0$.
4. L'exercice 4 du Gourdon est bien. Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante de réels positifs x_n telle que pour tout n , $f^{(n)}(x_n) = 0$.

2.11 Intégration sur un segment**2.11.1 Généralités****Exercice 103**

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ telle que $\int_a^b f^2(t) dt = \int_a^b f^3(t) dt = \int_a^b f^4(t) dt$. Déterminer f .

Exercice 104: [Mon08, p. 94] IPP

Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et telle que $f'' \geq 0$ sur $[0, 2\pi]$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) dx \geq 0$$

Exercice 105: [Fre10a, p. 211] Riemann-Lebesgue cas \mathcal{C}^1

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0$$

Exercice 106

On note, pour $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$.

1. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
2. En déduire un équivalent de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 107

Soit $f, g : [0, 1] \mapsto \mathbf{R}_+$ continues et telles que $fg \geq 1$ sur $[0, 1]$. Montrer que

$$1 \leq \int_0^1 f \int_0^1 g$$

Exercice 108: [Mon08, p. 95, sp. 104]

On cherche à montrer que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-u \sin(x)} \, dx = 0$$

1. Pour $u \in \mathbf{R}$, montrer que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-u \sin(x)} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin(x)} \, dx$$

et en déduire

$$\int_0^\pi e^{-u \sin(x)} \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin(x)} \, dx$$

2. Montrer que


$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x$$

3. Conclure.

Exercice 109: [Mon08, p. 95, sp. 105]

Montrer que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-u^2} \int_0^u e^{x^2} \, dx = 0$$

Exercice 110:  **Inégalité de Poincaré 1D**

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 s'annulant en a . Montrer :

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'(x)^2 dx \quad (*)$$

Cas d'égalité?

Exercice 111

Soit $f : [-1, 1] \mapsto \mathbf{R}$ continue ne s'annulant pas sur $[-1, 1]$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \int_{-1}^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq 4$$

Exercice 112

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que pour tout $k = 0, \dots, n-1$, on ait $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins n fois.

Exercice 113

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$.

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt$
2. On suppose de plus que $f(1) \neq 0$.

Trouver un équivalent de $u_n := \int_0^1 t^n f(t) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$. On pourra (mais ce n'est pas obligé) commencer par le cas où $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$.

2.11.2 Sommes de Riemann**Exercice 114**

Etude de la convergence de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Calcul de la limite éventuelle.

Exercice 115

Etude de la convergence de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$. Calcul de la limite éventuelle.

2.11.3 Calcul de primitives**Exercice 116**

Une primitive de arccos? arcsin? arctan?

Exercice 117

Calculer, sur un intervalle à préciser, une primitive de

$$f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x^2 - 1}$.

Exercice 118: [Fre10a, p. 200]

Calculer une primitive de

$$f : x \mapsto \frac{e^{x/2} \cosh(x/2)}{\cosh(x)}$$

à l'aide du changement de variable $u = e^x$. On rappelle que :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Exercice 119

Calculer une primitive de

$$f : x \mapsto \sin(\ln(x)).$$

On pourra utiliser des intégrations par parties.

2.12 Equation différentielles scalaires d'ordre 1 et 2

Voir aussi la section *équations différentielles*, sous-section *pratique*.

Exercice 120: [Mon08, p. 164, sp. 169]

Résoudre les équations différentielles suivantes sur un intervalle à préciser :

1. $y' - xy = x$
2. $y' + 2x = 4e^x + \sin(x) + \cos(x)$
3. $y' = y \tan(x) + \sin(x)$
4. $xy' - 2y = -\ln(x)$

Exercice 121

Résoudre sur \mathbf{R} l'équation différentielle :

$$\operatorname{sh}(x)y' - \operatorname{ch}(x)y = 1$$

Exercice 122

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ pour que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

Exercice 123

On note (E) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de (E) sur \mathbf{R} . On pose $g = f + f' + f''$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par g et en déduire une expression de g .
2. Résoudre (E) .

Exercice 124

Trouver les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1) \quad (E)$$

Exercice 125: BEOS 3813 TPE PC 2016

Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x)f(-x) = 1$$

Exercice 126

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = ax + b \quad (E)$$

Exercice 127: [Fre10b]

Résoudre l'équation différentielle suivante sur un intervalle ne contenant pas -1.

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x} \quad (*)$$

et étudier le prolongement éventuel à \mathbf{R} .

2.13 Analyse asymptotique**Exercice 128: Utilisation de DLs pour calculer des limites**

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right) \right)^x$$

Exercice 129

1. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

admet un développement limité en 0 à tout ordre, et donner ce développement limité.

2. Si deux fonctions admettent un développement limité à l'ordre $n \in \mathbf{N}^*$ en $a \in \mathbf{R}$ et si ces développements limités sont égaux, alors ces fonctions coïncident-elles forcément au voisinage de a ?

1. Montrer par récurrence (par exemple avec le théorème de limite de la dérivée) que pour tout n , f est n fois dérivable sur \mathbf{R} et que $f^{(n)}(x) = R_n(x)e^{1/x}$ pour tout $x > 0$ (naturellement $f^{(n)}(x) = 0$ pour $x < 0$), où $R_n \in \mathbf{R}(X)$. En fait, on a donc $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et le développement limité de f en 0 est donc à tout ordre identiquement nul (beau baratin).

2. Non, l'exemple ci-dessus en est précisément un contre-exemple. La fonction f admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, qui est le même que celui de la fonction nulle, or f n'est identiquement nulle sur aucun voisinage de 0.

Exercice 130

Montrer que :

$$\int_x^{x+1} 2^t \ln t \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2^x \frac{\ln x}{\ln 2}$$

Exercice 131

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 132: Développement asymptotique d'une suite définie implicitement

On pose pour $n \in \mathbf{N}$, $f_n : x \mapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède toujours une unique solution dans \mathbf{R} . On la notera, dans la suite, u_n .
2. Montrer que $u_n \in [-1, 0]$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
4. Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.
5. Montrer que $u_n + 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ puis que :

$$u_n = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 133

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation

$$\tan(x) = \sqrt{x}$$

admet une unique solution $x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et que l'on a :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + o(\sqrt{n})$$

Chapitre 3

Deuxième année

3.1 Intégration

3.1.1 Nature de l'intégrale, calcul d'intégrales

Exercice 134: Fonctions de signe constant, simples

Etudier la convergence de :

1. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln(t)}{(1+t^4)^3} dt$

3. $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}(1+t^2)} dt$

4. $\int_0^{+\infty} (t - \sqrt{t^2+1}) dt$

5. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2 dt$

Exercice 135: Fonctions de signe constant, discussion selon le paramètre

Condition nécessaire et suffisante sur ...

1. ... $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ pour que $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$ converge.

2. ... $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ pour que $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta} dt$ converge.

Exercice 136: Fonctions positives un peu plus compliquées (avec un DL, ...)

Etudier la convergence :

1. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^4 + t^2} dt$

2. $\int_0^1 \frac{\cosh(t) - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} dt$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\cosh(\sqrt{t}) - \cos(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}} dt$

Exercice 137

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbf{R}$ pour que $\int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 138

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1 + t^2} dt$ (Pour le calcul, indiquer éventuellement de procéder au changement de variable $u = \arctan(t)$).

Exercice 139: [Gau09, p. 81]

1. Montrer que l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx$$

2. Effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, et en déduire la valeur de l'intégrale.

3. Retrouver ce résultat en effectuant une IPP.

Exercice 140: [Gau09]

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^4}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1 + t^4} dt$.

1. Montrer que ces intégrales convergent et que $I = J$.

2. En factorisant par t^2 dans l'intégrale $I + J$ et en effectuant le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$, déterminer la valeur commune de I et J .

Exercice 141: [Bal09][Gou08] Fonctions de signe non constant

Etudier la convergence de :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)} dt$$

$$4. \int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$$

$$5. \int_{\frac{2}{\pi}}^1 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$$

Exercice 142: [Bal09] Fonction Gamma 1

On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de Γ est \mathbf{R}_+^* .

2. Montrer

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

et en déduire

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $g_t : x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto t^{x-1}$ est convexe. En déduire que Γ est convexe sur \mathbf{R}_+^* .

4. On admet que Γ est continue sur \mathbf{R}_+^* . Montrer que

$$\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

Exercice 143: [Bal09, p. 1016] Fonction de signe non constant

Etudier la convergence de :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) dt$$

3.1.2 Intégration des relations de comparaison**Exercice 144**

Trouver un équivalent quand $x \rightarrow +\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Exercice 145

- Déterminer un équivalent quand $x \rightarrow +\infty$ de $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.
- Montrer que, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \sum_{n=1}^N (n-1)! \frac{e^x}{x^n} + o\left(\frac{e^x}{x^N}\right)$$

3.1.3 Exercices théoriques**Exercice 146: [Gou08], BEOS 2326 Centrale PC 2016**

- Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ continue croissante telle que $\int_0^1 f(t) dt$ converge. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

- En déduire, pour $\alpha > 0$, un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1}$$

Exercice 147: [Amr09] BEOS 4529 Mines MP 2018

Soit $\alpha > 0$ et $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ continue telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 148

Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue, décroissante, de limite nulle en $+\infty$. Et positive, mais ça fait donc la 3e fois que je le dis.

- On pose pour $k \in \mathbf{N}$,

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) \sin(x) dx.$$

Montrer que $(I_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées.

- Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) \sin(x) dx$ est convergente.

3.1.4 Intégrale fonction des bornes**Exercice 149**

Soit f une fonction positive intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x t f(t) dt = 0.$$

Exercice 150: [Mon08, p. 95, sp. 103]

Etude et représentation graphique de

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

Exercice 151: BEOS 2507 Centrale PC 2016

On étudie l'intégrale

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Etudier f aux bornes de son intervalle de définition.
3. Etudier les variations de f .

3.1.5 Intégrales à paramètre**Exercice 152: BEOS 3516 Mines PC 2017**

Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} dt = - \int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt$$

Exercice 153: [Amr09, p. 257]

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} dt$$

1. Montrer que F est bien définie et dérivable sur \mathbf{R} . Pour $x \in \mathbf{R}$, exprimer $F'(x)$ comme une intégrale à paramètre.
2. Pour $x \in \mathbf{R}$, calculer $F'(x)$ et en déduire une expression explicite de $F(x)$.

Exercice 154: [Amr09, p. 259]

Pour $x \in \mathbf{R}_+$, on pose :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t} dt$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur \mathbf{R}_+ . Est-elle définie pour $x < 0$?
2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}_+^* . Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, exprimer $F'(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
3. F est-elle dérivable en 0?

Exercice 155: [Amr09, p. 260] Fonction Gamma, bis

1. Montrer que, pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur \mathbf{R}_+^* .
2. Montrer la fonction Gamma, définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

est de classe C^∞ sur \mathbf{R}_+^* et que l'on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$$

3. Montrer

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

et en déduire

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

4. Montrer Γ est une fonction convexe sur \mathbf{R}_+^* .
5. Établir :

$$\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

6. Déterminer la limite de Γ en $+\infty$.

Exercice 156: [Amr09, p. 270]

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt = \frac{\ln(2)}{2} \arctan(x) + \frac{\pi}{8} \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$$

2. En déduire la valeur de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$$

Exercice 157: [Amr09, p. 272] BEOS 4622 Mines MP 2018 - Calcul de (la moitié) de l'intégrale de Gauss

Soit

$$F : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \end{cases}$$

1. Montrer que F est dérivable sur \mathbf{R} et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

2. En déduire que la fonction $x \mapsto F(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est constante sur \mathbf{R}

3. Conclure sur la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Exercice 158

Pour $t \in \mathbf{R}_+^*$, on pose :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} e^{-tx} dx \quad (3.1)$$

1. Montrer que F est continue sur \mathbf{R}_+^* .
2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}_+^* , et déterminer une formule explicite pour $F'(t)$.
3. Déterminer une formule explicite pour $F(t)$.
4. Calculer $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$ par deux méthodes :
 - (a) grâce à la question précédente,
 - (b) directement à partir de la formule intégrale (3.2) de F .

Exercice 159: Le même exo, réécrit en intégrant par rapport à t

Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} dt \quad (3.2)$$

1. Montrer que F est continue sur \mathbf{R}_+^* .
2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}_+^* , et déterminer une formule explicite pour $F'(x)$.
3. Déterminer une formule explicite pour $F(x)$.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ par deux méthodes :
 - (a) grâce à la question précédente,
 - (b) directement à partir de la forme intégrale (3.2) de F .

Exercice 160: [Amr09, p. 274]

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction

$$t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est intégrable sur \mathbf{R}_+^* .

On considère

$$F : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt \end{cases}$$

2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} et donner $F'(x)$.

3. Calculer explicitement $F'(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.

4. En déduire :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$$

5. Donner l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

6. Conclure sur la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2 dt$

Exercice 161: [Amr09, p. 277]

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}$$

1. Montrer que F_n est dérivable sur tout segment $[a, b] \subset \mathbf{R}_+^*$, puis sur \mathbf{R}_+^* et que

$$\forall x > 0, \quad F_n'(x) = -2nx F_{n+1}(x)$$

2. En déduire une expression de $F_n(x)$.

Exercice 162: [Amr09, p. 277]

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}$$

Montrer que F_n est dérivable sur \mathbf{R}_+^* , exprimer $F_n'(x)$ en fonction de $F_{n+1}(x)$ et en déduire une expression de $F_n(x)$.

Exercice 163: BEOS 3234 CCP PC 2017

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$$

et

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt$$

pour tout réel x convenable.

1. Montrer que G est bien définie sur \mathbf{R} . On admet que F l'est aussi.
2. Pour $x > 0$, prouver l'égalité $G(x) = xG(1)$.
3. Pour $x \in \mathbf{R}$, montrer l'encadrement $0 \leq G(x) - F(x) \leq \frac{\pi}{2}$.
En déduire que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} xG(1)$.
4. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R} et que sa dérivée seconde est donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{1+t^2} dt$$

5. Montrer que F est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 4y = \pi - 4xG(1)$$

sur $]0, +\infty[$.

6. En déduire une expression de F sur $]0, +\infty[$ puis sur \mathbf{R} .

Exercice 164: [Amr09, p. 278] Intégrale de Dirichlet

On considère la fonction F donnée pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$$

1. Montrer que F est dérivable sur \mathbf{R}_+^* et calculer sa dérivée.
2. En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad F(x) = C - \arctan(x)$$

3. En considérant la suite $(F(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$, déterminer la valeur de C .
4. En considérant la suite $(F(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbf{N}^*}$, Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

3.1.6 Convergence dominée et sommation L^1

Exercice 165

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

Exercice 166

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$$

Exercice 167

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 168

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \cos(x/n) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$$

Exercice 169

Déterminer la limite de :

$$1. u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

$$2. v_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

sachant que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 170

Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$ on pose :

$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p e^{-nt}}{e^t - 1} dt$$

1. (a) Montrer que S_n est bien définie.
- (b) Pour $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$T(a, b) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt$$

Calculer $T(a, b)$.

2. On veut montrer, de deux façons différentes, que

$$S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}$$

- (a) *Première méthode* : le montrer en utilisant le théorème d'intégration terme à terme.
- (b) *Deuxième méthode* : montrer que , pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_0 = p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} + S_n$$

puis, que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, et conclure.

Exercice 171

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ continue.

Montrer que :

$$u_n := \int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 172

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^2} dx = ?$$

Exercice 173

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} dx = ?$$

3.2 Séries numériques

Exercice 174: [Lar12, p. 84, sp. 95] Niveau 1, séries à termes positifs

Déterminer la nature de la série de terme général suivant :

1. $\frac{3n+2}{n^3}$
2. $\sqrt{n+3} - \sqrt{n}$
3. $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$
4. $\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right)$
5. $\frac{2^n}{1+n!}$
6. $\frac{1}{n^2 \ln(n)}$
7. $\frac{\ln(n)}{n}$
8. $\frac{n!}{n^n}$
9. $\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}$

Exercice 175: [Rou15, p. 375][Ram] Niveau 2, DLs très simples ou équivalents directs

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$
4. $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)$
5. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2}$
6. $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+n}}\right)$
7. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$

Exercice 176: [Mon09, p. 117] Niveau 3

Nature de la série de terme général suivant (éventuellement en fonction du paramètre) :

1. $n^{\frac{1}{n^2}} - 1$
2. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
3. $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - \frac{n}{n+1}e^a$

Exercice 177: Niveau 3 bis, sans DLs mais un peu astucieux

Nature de la série de terme général suivant :

1. $\frac{\ln(n)^n}{n^{\ln(n)}}$
2. $\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$

Exercice 178: (BEOS 2394 Banque PT 2016) Niveau 3

Nature de la série de terme général suivant en fonction du paramètre réel α :

$$\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$$

Exercice 179: [Des01, p. 311, sp. 1149] Niveau 4, MP - utilise théorèmes de MP

Déterminer la nature de $\sum u_n$ où u_n égale :

1. $\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k}\right)^\alpha}$
2. $(-1)^n \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(n-p)}$

Exercice 180: [Lar12, p. 84, sp. 96]

On note, pour $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$

1. Calculer I_n pour tout $n \geq 3$ (on pourra effectuer le changement de variable $t = 1 + x$).
2. En déduire la nature de la série $\sum_n I_n$.

Exercice 181: [Lar12, p. 84]

Existence et calcul de

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

Exercice 182: [Lar12, p. 108]

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

Exercice 183: BEOS 3226 Banque PT 2017

Pour $a \in \mathbf{R}^*$, on considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + (na)^2}$.

1. Etudier la convergence de la série. La somme est notée $h(a)$.
2. Etudier les variations de h , puis sa limite en $+\infty$.
3. Soit $a \in \mathbf{R}^*$. Prouvez que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{1 + ((k+1)a)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{1 + (ta)^2} \leq \frac{1}{1 + (ka)^2}$$

4. Donner un équivalent de $h(a)$ quand $a \rightarrow 0$.

Exercice 184: [Ram][Lar12, p. 84]

Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes positifs convergente.

1. Nature de la série de terme général $v_n = \frac{1}{n} \sqrt{u_n}$.
2. Nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{n} \sqrt[3]{u_n}$.

Exercice 185: [Lar12, p. 84, sp. 97] Convergence et somme d'une série d'intégrales généralisées

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx$ existe.
2. Existence et calcul de

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} I_n$$

Exercice 186: [Lar12, p. 84, sp. 97]

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_1 = 0$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. Calculer u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbf{N}^*$
2. Existence et calcul de

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!}$$

Exercice 187: [Fre10b, p. 107]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que, si $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ est absolument convergente, alors les séries $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_n$ et $\sum_{n \in \mathbf{N}} w_n$ le sont aussi.

Dans ce cas, que dire de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$?

2. Montrer que, si $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ est convergente mais pas absolument convergente, il se peut que $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_n$ et $\sum_{n \in \mathbf{N}} w_n$ divergent.


3. Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Exercice 188: [Des01, p. 311]

Condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbf{R}$, $a > 0$ et $b > 0$ pour que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} - \alpha \ln(n)$$

soit convergente.

Exercice 189: [Des01, p. 311]  Nature des séries selon un paramètre

Nature des séries suivantes, selon le(s) paramètre(s) :

1. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}$
2. $\sum_{n \geq 1} e^{-n^\alpha} \int_1^n e^{t^\alpha} dt$
3. $\sum_{n \geq 1} \sin(\pi \sqrt[3]{n^3 + \lambda n^\alpha})$, $\lambda \neq 0$, $\alpha \leq 2$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi \sqrt{n})}{n^\alpha}$

Exercice 190: [Des01, p. 311]

Existence et calcul de :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+4)}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2}) \cdots (1+\sqrt{n})}$

Exercice 191: [Ram]

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs. Comparer les nature des séries de termes généraux respectifs u_n et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Exercice 192: BEOS 4319 Banque PT 2018

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite à termes positifs.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{u_n}{1+nu_n}$ lorsque

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(b) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$

(c) $u_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } m \text{ entier tel que } n = 2^m - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On suppose maintenant que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est à termes strictement positifs.

2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{u_n}{1+n^2u_n}$?

3. (a) Montrer que si $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(b) En déduire la nature de $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ en fonction de $\sum u_n$.

4. Montrer que $\sum \frac{u_n}{1+u_n^2}$ peut diverger et peut converger.

Exercice 193: [Gou08]

Soit (u_n) une suite à termes positifs décroissante. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Exercice 194: [Des01, p. 312, sp. 1154]

Soit (a_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = a > 0$. Etudier la série $\sum \frac{1-a_n}{n}$.

Exercice 195: [Gou08]

Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$$

3.3 Familles sommables**Exercice 196**

La famille suivante est-elle sommable ?

$$\left(\frac{1}{a^2 + b^2} \right)_{a,b \in \mathbf{N}^*}$$

Exercice 197

Existence et calcul de :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

Exercice 198Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

Exercice 199Soit $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$.

1. Montrer que la famille des $(z^{pq})_{p,q \in \mathbf{N}^*}$ est sommable et calculer la somme de ses termes.
2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{1-z^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)z^n$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n .**Exercice 200**

1. Pour quels $\alpha > 0$ la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$ est-elle sommable ?
2. Pour quels $\alpha > 0$ la famille $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$ est-elle sommable ?
3. Soit $a, b > 1$. La famille $\left(\frac{1}{a^p+b^q}\right)_{p,q \geq 0}$ est-elle sommable ?

Exercice 201

La famille suivante est-elle sommable ?

$$\left(\frac{1}{np(n+p)}\right)_{n,p \in \mathbf{N}^*}$$

3.4 Convexité**Exercice 202: [Fre10a, p. 156]**Soit f une application convexe et majorée sur \mathbf{R} . Montrer que f est constante. Le résultat est-il toujours valable si on suppose maintenant f convexe majorée sur \mathbf{R}_+ ?

Exercice 203: [Fre10a, p. 157]

Soit f une application convexe sur un intervalle non majoré I .

1. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ possède une limite, éventuellement égale à $+\infty$, quand $x \rightarrow +\infty$.
2. Dans le cas où cette limite est finie, disons $\ell \in \mathbf{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ admet une limite, éventuellement égale à $-\infty$, quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 204: Inégalité de Jensen discrète

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ convexe, $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs vérifiant

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Montrer que

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Exercice 205: [Fre10a, p. 157]

Soit $n \geq 2$ un entier et a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$$

Exercice 206: [Fre10a, p. 158]

Montrer que $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur \mathbf{R} .

En déduire que pour tous a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n réels strictement positifs, on a

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n b_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)}$$

Exercice 207: [Fre10a, p. 175]

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) \geq f(x)^2$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x)f''(x) \geq f'(x)^2$$

2. On suppose de plus que f est à valeurs strictement positives. Montrer que $\ln \circ f$ est convexe.
3. f est-elle convexe ?

Exercice 208: [Pel18] Une version de l'inégalité de Jensen

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ continue et $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ convexe. Montrer que

$$\Phi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \Phi \circ f(t) dt$$

3.5 Espaces vectoriels normés**3.5.1 Normes****Exercice 209: [Fre10b, p. 79]**

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on pose pour tout $A = (a_{ij})$:

$$\|A\|_1 = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$$

1. Montrer que ce sont bien des normes et qu'elles sont équivalentes.
2. (a) Déterminer le plus petit réel α tel que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \|AB\|_1 \leq \alpha \|A\|_1 \|B\|_1$$

- (b) Déterminer le plus petit réel β tel que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \|AB\|_\infty \leq \beta \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

Exercice 210: [Fre10b, p. 84]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ et $N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$.

1. Montrer que N est une norme.
2. On pose pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

En utilisant la suite (f_n) , déterminer si les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur E .

Exercice 211: [Mon09, p. 6]

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ et v_1, v_2 les applications de E dans \mathbf{R} définies, pour toute $f \in E$, par

$$v_1(f) = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt$$

et

$$v_2(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

Montrer que v_1 et v_2 sont des normes sur E . Sont-elles équivalentes?

Exercice 212: [Mon09, p. 7]

On note $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R})$ et N, N' et N'' les applications de E dans \mathbf{R} définies, pour $f \in E$, par

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$N'(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

et

$$N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$$

1. Montrer que N, N' et N'' sont des normes sur E .
2. Montrer que N est dominée par N' et N' est dominée par N'' .
3. Comparer N, N' et N'' pour la relation d'équivalence entre normes.

Exercice 213: [Des01, p. 392, sp. 1190]

On note

$$N : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto \sup_{t \in \mathbf{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} \end{cases}$$

1. Montrer que N est une norme sur \mathbf{R}^2 .
2. La comparer à la norme euclidienne, en donnant le meilleur encadrement possible.
3. Donner une expression explicite de $N(x, y)$ en fonction de x et de y et à l'aide de fonctions usuelles, représenter graphiquement la boule unité pour N . Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 214: [Mon09, p.8]

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R}) \mid f(0) = 0\}$.

Pour $f \in E$, on note

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

et

$$\nu(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)|$$

Montrer que N et ν sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 215: [Des01, p. 392, sp. 1192]

On pose $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ et, pour $f \in E$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

1. Montrer que ce sont des normes et les comparer.
2. Etudier pour chacune si $\Omega = \{f \in E \mid \forall t \in [0, 1], f(t) > 0\}$ est une partie ouverte.

Exercice 216

On se place dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, et on se donne $\varphi \in E$.

On pose, pour $f \in E$, $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

Montrer que N_φ est une norme si et seulement si $\varphi^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est dense dans $[0, 1]$.

3.5.2 Continuité**Exercice 217: [Mon09, p. 6]**

Soit E, F et G des evn, $A \subset E$ et $B \subset F$ avec A et B non vides, et $f : A \rightarrow G$ et $g : B \rightarrow G$ deux applications.

On note

$$\varphi : \begin{cases} A \times B & \rightarrow G \\ (x, y) & \mapsto f(x) + g(y) \end{cases}$$

Montrer que φ est continue sur $A \times B$ si et seulement si f est continue sur A et g est continue sur B .

3.5.3 Distance à un sous-espace

Exercice 218: [Sau, CCP 2013]

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$, et on note

$$A = \{f \in E, | f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1\}$$

1. Montrer que A est fermée dans E .
2. Montrer que, pour $f \in E$, si $f(0) = 0$ et $\|f\|_\infty \leq 1$, alors $\int_0^1 f(t) dt < 1$
3. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in [0, 1]$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + 1/n & \text{si } x \geq \alpha \\ (1/\alpha + 1/\alpha n)x & \text{si } x < \alpha \end{cases}$$

Montrer qu'on peut trouver α tel que $\int_0^1 f_n(t) dt \geq 1$.

En déduire la distance de 0 à A (on rappelle qu'il s'agit de $\inf_{f \in A} \|f\|_\infty$).

Exercice 219: [Pel18] Distance à un sous-espace de dimension finie

Soit E un evn et F un sev de dimension finie de E . Pour $x \in E$, on pose $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.
Montrer que $d(x, F)$ est atteinte.

3.5.4 Ouverts, fermés, densité**Exercice 220: [Mon09, p. 6]**

On note E le \mathbf{R} -ev des applications continues bornées de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , muni de $\|\cdot\|_\infty$.

1. $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0\}$ est-elle fermée dans E ?
2. $U = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbf{R}, f(x) > 0\}$ est-elle ouverte dans E ?

Exercice 221: [Mon09, p. 7]

Soit E le \mathbf{R} -ev des applications bornées de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} , muni de $\|\cdot\|_\infty$, et

$$A = \{f \in E \mid \forall x \in [0, 1], e^{f(x)} \geq 2 + f(x)\}$$

Montrer que A est une partie fermée non bornée de E .

Exercice 222: [Mon09, p. 6]

Soit E un evn et Ω un ouvert de E .

1. Montrer que pour tout $a \in E$, la partie $\{a + x, x \in \Omega\}$ est un ouvert de E .
2. En déduire que pour toute partie A de E , la partie $\{a + x, (a, x) \in A \times \Omega\}$ est un ouvert de E .

Exercice 223

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que l'ensemble des involutions de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 224

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Les parties suivantes de E sont-elles ouvertes dans E ?

1. $A = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$
2. $A = \{f \in E \mid f \text{ croissante}\}$
3. $A = \{f \in E \mid f \text{ dérivable}\}$
4. $A = \{f \in E \mid f \text{ polynomiale}\}$. A est-il fermé? Et si $E = \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ toujours muni de la norme infinie?

1. Non. On peut intuitivement dire que, parce qu'il est fermé, en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $f \mapsto f(0)$ (linéaire et 1-lipschitzienne), il y a peu de chances qu'il soit ouvert.

Pour prouver qu'il n'est pas ouvert, on pose $f_0 = \tilde{0} \in A$, et il se trouve que pour tout $\varepsilon > 0$, $f_0 + \frac{\varepsilon}{2} \in B(f_0, \varepsilon)$ mais n'appartient pas à A , car vaut $\frac{\varepsilon}{2} \neq 0$ en 0.

2.

Exercice 225: [Des01, p. 389, sp. 1190][Fab, EVN p. 7]

Soit E le \mathbf{R} -ev des suites réelles bornées, muni de la norme $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n|$.

1. Déterminer l'adhérence de l'ensemble $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ des suites presque nulles.
2. On note c_0 l'ensemble des suites réelles de limite nulle, et μ l'opérateur de moyenne sur E , donné par :

$$\mu : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ (u_n) & \longmapsto & \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \right) \end{cases}$$

- (a) Vérifier que μ est bien un endomorphisme continu de E . Calculer la norme subordonnée de μ .
- (b) Montrer que $\mu(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}) \subset c_0$.
- (c) En utilisant les questions précédentes, retrouver le théorème de Cesaro.

Exercice 226: [Pel18]

On note E le \mathbf{R} -ev des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} , muni de $\|\cdot\|_\infty$, et on note \mathcal{M} l'ensemble des fonctions continues et monotones de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} . Montrer que \mathcal{M} est un fermé d'intérieur vide.

Exercice 227

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application. On rappelle que son graphe est :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbf{R}\}$$

1. Montrer que, si f est continue sur \mathbf{R} , alors Γ_f est fermé dans \mathbf{R}^2 .
2. Montrer que, si f est bornée et Γ_f est fermé dans \mathbf{R}^2 , alors f est continue sur \mathbf{R} .
3. Et si f est non bornée?

Exercice 228: (BEOS 4619 TPE MP 2018)

Soit E un evn sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} .

1. Soit F un sev de E . Montrer que \bar{F} est un sev.
2. Soit F un hyperplan. Montrer que F est fermé ou dense dans E .

Exercice 229

Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Montrer que $F + G$ est fermé.

Exercice 230

On note \mathcal{P}_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n exactement.

(a) Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Établir :

$$P \text{ est scindé sur } \mathbf{R} \iff \forall z \in \mathbf{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n.$$

(b) En déduire que le sous-ensemble de \mathcal{P}_n formé des polynômes scindés sur \mathbf{R} est une partie fermée de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 231

Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe de similitude est fermée sont exactement les matrices diagonalisables sur \mathbf{C} .

Exercice 232: BEOS 4595 Mines MP 2018

Soit $P = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$ un polynôme à coefficients réels simplement scindé.

Soit $Q = X^n + b_1X^{n-1} + \dots + b_{n-1}X + b_n$ un polynôme à coefficients réels.

Montrer que si les b_i sont assez proches des a_i alors Q est simplement scindé.

Exercice 233

Soit A une partie convexe dense d'un espace vectoriel normé de dimension finie E . Montrer que $A = E$.

3.5.5 Compacité

Exercice 234: [Pel18] Un cas particulier simple du théorème de Riesz

Soit $E = \{(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0\}$.

- Vérifier que E muni de $\|(a_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n|$ est un evn.
- Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $(e_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $e_n^{(k)} = 0$ si $n \neq k$ et $e_n^{(k)} = 1$.
En utilisant les suites $(e_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$, montrer que la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ n'est pas compacte.

Exercice 235

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte non vide de E , et $f : K \rightarrow K$ une application ρ -lipschitzienne.

- On suppose dans cette question que $\rho < 1$.
 - Montrer que, sous réserve d'existence, tout point fixe de f est unique.
 - Montrer que f admet un point fixe.
- Montrer que, si $\rho = 1$ et K est convexe, alors f admet un point fixe.

Indication : considérer, pour $a \in K$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} f(x)$.

Exercice 236: [Des01, p. 449, sp. 1184] Pseudo-Kakutani

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie non vide, compacte et convexe de E .

- Soit u un endomorphisme de E tel que $u(K) \subset K$. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u^{(n)} = \frac{1}{n}(\text{id} + u + \dots + u^{n-1})$$

Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} u^{(n)}(K) \neq \emptyset$.

Montrer que si $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} u^{(n)}(K)$, alors $u(x) = x$.

- Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E qui commutent deux à deux, et telle que pour tout $i \in I$, $u_i(K) \subset K$. Montrer qu'il existe dans K un point fixe commun à tous les u_i .

3.5.6 Continuité linéaire

Exercice 237: (BEOS 1331 CCP MP 2015)

Soit E le \mathbf{R} -ev des suites réelles convergeant vers 0, muni de la norme $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
2. Soit $(u_n) \in E$, montrer que $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{u_n}{2^n}$ converge.
3. Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u_n) & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n} \end{cases}$$

est continue sur E .

Exercice 238: [Pel18]

Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose $N(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$.

1. Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, vérifier que $N(P)$ est bien défini. Puis, vérifier que $(\mathbf{R}[X], N)$ est bien un evn.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$ on pose $u_n(P) = P^{(n)}(0)$ et $v(P) = P'$.
Les applications u_n et v sont-elles continues sur $(\mathbf{R}[X], N)$? Calculer leurs normes subordonnées.

Exercice 239: [Pel18]

1. Soit Φ une forme linéaire positive sur $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$, c'est-à-dire une forme linéaire telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \quad f \geq 0 \Rightarrow \Phi(f) \geq 0$$

Montrer que Φ est continue, trouver le plus petit réel κ tel que $|\Phi| \leq \kappa \|\cdot\|_\infty$, et donner un exemple d'une telle forme linéaire.

2. L'évaluation en 0 :

$$\text{ev}_0 : \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) \begin{cases} \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{cases}$$

est-elle continue sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$? Pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 240

On pose $E = (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Soit $\varphi \in E$ fixée et Φ la forme linéaire définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \Phi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t) dt.$$

Montrer que Φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 241: [Mon09, p. 9, sp. 22]

Soit E un evn distinct de $\{0\}$.

On définit la norme suivante sur l'ensemble des endomorphismes continus $\mathcal{L}_c(E)$:

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme et qu'elle est sous-multiplicative, i.e.

$$\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E), \quad \|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$$

Montrer qu'il n'existe pas de couple (u, v) d'endomorphismes continus sur E tels que :

$$u \circ v - v \circ u = \text{id} \quad (E)$$

Exercice 242

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ donnée par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

On se donne $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une bijection continue strictement croissante et on étudie l'endomorphisme de $T_\varphi \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall f \in E, \quad T_\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

1. On suppose que φ^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Montrer que T_φ est continue sur E .
2. On prend dans cette question (et dans cette question seulement) $\varphi : x \mapsto x^2$. Montrer que T_φ n'est pas continu.
3. Montrer que T_φ est continu si et seulement si φ^{-1} est lipschitzienne.

3.5.7 Connexité par arcs**Exercice 243**

Soit I un intervalle réel. On note $A = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$.

1. Montrer que A est connexe par arcs dans \mathbf{R}^2
2. En déduire que toute application continue injective de I dans \mathbf{R} est strictement monotone.

3.5.8 Exponentielles d'endomorphismes**Exercice 244: ☼**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $e^A = I_2$.

A-t-on $A = 0$?

3.6 Espaces préhilbertiens

3.6.1 Produit scalaire, orthogonal et base orthonormée concrets

Exercice 245: BEOS 4321 Banque PT 2018

On note E l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de $[0,1]$ dans \mathbf{R} telles que $f(0) = f(1) = 0$. On pose :

$$\Theta : \begin{cases} E^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_0^1 f'(x)g'(x) dx \end{cases}$$

et

$$\Phi : \begin{cases} E^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_0^1 (f(x)g(x) + f'(x)g'(x)) dx \end{cases}$$

1. Montrer que Θ est un produit scalaire
2. Montrer que Φ est un produit scalaire
3. Trouver $m, M \in \mathbf{R}^*$ tels que pour tout $f \in E$,

$$m\Phi(f, f) \leq \Theta(f, f) \leq M\Phi(f, f)$$

(avec bien sûr $m \geq 0 \dots$)

Exercice 246: [Mon09, p.8]

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et $N : E \rightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $f \in E$, par

$$N(f) = \left(\int_0^1 (f'(t))^2 dt + f(0)f(1) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrer que N est une norme sur E (on pourra montrer qu'elle découle d'un produit scalaire).

Exercice 247

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et, pour $f, g \in E$,

$$(f | g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E .
2. Quel est l'orthogonal de la droite engendrée par $t \mapsto 1$?
3. Quel est l'orthogonal de $G := \{g \in E \mid g(0) = 0\}$?

Exercice 248: BEOS 508 Banque PT 2013

On pose $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ et

$$\forall f, g \in E, \quad (f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

1. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ définit bien un produit scalaire sur E .
2. On pose

$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R}) \mid f'' = f\}$$

Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.

Exprimer la projection orthogonale sur W .

Exercice 249: Polynômes de Laguerre - BEOS 3781 Banque PT 2017

On note $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbf{R}) \mid \int_0^{+\infty} f^2(x)e^{-x} dx \text{ converge} \right\}$

1. Montrer que, pour $a, b \in \mathbf{R}$,

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

2. Montrer que :

$$\varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x} dx \end{cases}$$

est définie, et constitue un produit scalaire.

3. On définit les fonctions L_n pour $n \in \mathbf{N}$ par :

$$L_0(x) = 1 \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

Montrer que L_n est un polynôme de degré n .

4. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthonormale.

3.6.2 Un peu plus théoriques**Exercice 250**

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, strictement positive.

On définit sur $\mathbf{R}[X]$ un produit scalaire par $(P | Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t) dt$.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de $\mathbf{R}[X]$ pour ce produit scalaire, échelonnée en degré.
2. Soit $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une telle base. Montrer que les P_n sont tous scindés sur \mathbf{R} , à racines simples.
3. On fixe $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P_n .

Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall P \in \mathbf{R}_{2n-1}[X], \quad \int_0^1 f(t)P(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i)$$

Exercice 251

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien et e_1, \dots, e_n des vecteurs unitaires de E , tels que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2 \quad (*)$$

Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E .

Exercice 252: BEOS 1602 Mines-Ponts MP 2015 - Pareil en plus compliqué

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien et (e_1, \dots, e_n) une famille libre d'éléments de E , telle que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2$$

1. Montrer que $\|e_n\|^2 \leq 1$.
2. Montrer que $\|e_n\| = 1$.
3. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E .

Exercice 253: BEOS 1765 Mines-Ponts MP 2015

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien. Montrer que $\{(x, y) \in E^2 \mid (x, y) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2 .

Exercice 254: RMS 600/497 Mines MP 2017 - BEOS 3170 CCP MP 2017 Familles obtusangles

Soit E un espace euclidien de dimension n . Une famille (x_1, \dots, x_p) est dite obtusangle lorsque

$$\forall i \neq j, \quad (x_i | x_j) < 0$$

1. Montrer que si (x_1, \dots, x_p) est obtusangle et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des réels quelconques, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^p |\lambda_i| x_i \right\|$$

En déduire que $p \leq n + 1$.

2. Montrer qu'il existe une famille (u_1, \dots, u_{n+1}) de vecteurs unitaires vérifiant, pour tout $i \neq j$, $(u_i | u_j) = -\frac{1}{n}$.
3. Montrer que si u_1, \dots, u_{n+1} sont des vecteurs unitaires et α est un réel strictement négatif vérifiant, pour tout $i \neq j$, $(u_i | u_j) = \alpha$, alors $\alpha = -\frac{1}{n}$.

Exercice 255: Pareil, preuve par récurrence

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

Soit $p \geq 2$ et $(e_k)_{1 \leq k \leq p}$ une famille de vecteurs de E tels que

$$\forall (i, j) \in [1, p], \quad i \neq j \Rightarrow (e_i | e_j) < 0$$

Montrer que toute sous famille de $(e_k)_{1 \leq k \leq p}$ de cardinal $p - 1$ est libre.

Exercice 256

On pose $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, et on le munit de la norme de la convergence uniforme.
Soit $a \in]0, 1[$, $p \in \mathbf{R}_+^*$ et $\ell : E \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\ell(f) = \int_0^a x^p f(x) \, dx$$

1. Montrer que ℓ est une forme linéaire continue, et déterminer sa norme triple $\|\ell\| := \sup_{\|f\|=1} |\ell(f)|$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de $g \in E$ tel que

$$\forall f \in E, \quad (g | f) = \ell(f)$$

3. CNS sur $h \in E$ pour qu'il existe $g \in E$ tel que

$$\forall f \in E, \quad \ell(f) = (g | f)$$

Exercice 257: BEOS 4307 ENS CR MP 2018

On pose $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, sur lequel on définit :

$$(f | g) := \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$$

1. Montrer que, pour tout $h \in E$,

$$\left(h \geq 0 \text{ et } \int_0^1 h(x) \, dx = 0 \right) \Rightarrow h = 0$$

2. Montrer que $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien réel.

Soit $a \in]0, 1[$, $p \in \mathbf{R}_+^*$ et $\ell : E \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\ell(f) = \int_0^a x^p f(x) \, dx$$

3. Montrer que ℓ est une forme linéaire continue, et déterminer sa norme triple $\|\ell\| := \sup_{\|f\|=1} |\ell(f)|$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de $g \in E$ tel que

$$\forall f \in E, \quad (g | f) = \ell(f)$$

On pose $F = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. Soit $h \in F$ et $\ell_1 : F \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\ell_1(f) = \int_0^a h(x)f(x) \, dx$$

5. CNS sur h pour qu'il existe $g \in F$ tel que

$$\forall f \in F, \quad \ell_1(f) = (g | f)$$

On pose, pour $f, g \in F$,

$$(f | g)_1 = \int_0^1 [f(x)g(x) + f(x)g'(x)] \, dx$$

On vérifie sans peine qu'il s'agit d'un produit scalaire sur F .

6. F est-il fermé au sens de la norme dérivant de ce produit scalaire ?

Exercice 258: BEOS 2716 Ulm MP 2016

Soit E un espace euclidien. Une famille orthonormée totale est-elle une base de E ?

Exercice 259: BEOS 3625 Mines MP 2017

On note E l'espace des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans \mathbf{R} , et, pour $f, g \in E$,

$$(f | g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t)g(t) dt$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

1. Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire.

2. On pose $e_0 : t \mapsto 1$ et, pour $k \geq 1$, $e_k : t \mapsto \sqrt{2} \cos(kt)$. Interpréter $S_n(f) = \sum_{k=0}^n (f | e_k) e_k$.

3. Montrer que $\sum_{k \geq 0} (f | e_k)^2$ converge.

4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $\|f - p \circ \cos\|_\infty \leq \varepsilon$.

5. Montrer que $\|f - S_n(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et déterminer la somme de $\sum_{k \geq 0} (f | e_k)^2$.

Exercice 260: BEOS 4452 ENS MP 2018 - convergence faible dans un Hilbert, Radon-Riesz

Soit H un espace préhilbertien réel. On dit que $(u_n) \in H^{\mathbf{N}}$ vérifie (F) si :

$$\exists u \in H, \forall v \in H, \quad (u_n | v) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (u | v)$$

1. Sous ces hypothèses, montrer que

$$\|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|u\|$$

2. Soit $w \in H \setminus \{0\}$ fixé. On pose, pour $u \in H$,

$$f(u) = \|u\|^2 - |(w | u)|^{\frac{3}{2}}$$

Montrer que f atteint son minimum sur H .

Exercice 261: BEOS 3983 Mines MP 2018


Soit E un espace préhilbertien réel et u, v des vecteurs unitaires avec $u \neq -v$.

Montrer que

$$\{\|x\|; x \in E \text{ tel que } (u | x) = (v | x) = 1\}$$

admet un minimum et le déterminer.

3.6.3 Calcul d'infimum par distance à un sous-espace

Exercice 262:  **BEOS 2375 Centrale PC 2016**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et S_n le sous-espace des matrices symétriques réelles.

On pose $\lambda = \inf_{M \in S_n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2$ où $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

1. Prouver l'existence de λ et la calculer en fonction des a_{ij} .
2. On pose

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et on note λ_α l'infimum associé.

Montrer de deux manières que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda_\alpha = 0$.

Exercice 263

Calculer

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^2 - (at + b))^2 dt, (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Exercice 264

Calculer

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} t^2 (\ln(t) - at - b)^2 dt, (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Exercice 265: BEOS 2393 Banque PT 2016

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$. On considère

$$(f | g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. Pour $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, on pose

$$I(a, b, c) = \int_{-1}^1 (|x| - ax^2 - bx - c)^2 dx$$

- (a) Trouver (a, b, c) pour que $I(a, b, c)$ soit minimal.
- (b) Calculer le minimum en question.

Exercice 266

Evaluer

$$\inf_{a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}} \int_0^{+\infty} \exp(-x)(1 + a_1x + \dots + a_nx^n)^2 dx$$

3.7 Suites et séries de fonctions**3.7.1 Suites de fonctions**

Exercice 267

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$.
2. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme de (f_n) sur tout $[0, a]$ pour $0 \leq a < 1$.

Exercice 268: [Fre10b, p. 132]

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = x^n(1 - x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

1. (a) Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$.
 (b) En calculant f'_n , montrer que f_n atteint son maximum en $x = \frac{n}{n+1}$.
 (c) Montrer que $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$
 (d) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. (a) Etudier la convergence simple de (g_n) sur $[0, 1]$.
 (b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |\sin(\pi x) - \sin(\pi)| \leq \pi|x - 1|$$

en déduire que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$$

puis que : $\|g_n\|_\infty \leq \pi\|f_n\|_\infty$.

- (c) Conclure quant à la convergence uniforme de (g_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 269: Une version moins détaillée du précédent

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = x^n(1 - x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

1. Etudier la convergence simple de (g_n) sur $[0, 1]$.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |\sin(\pi x) - \sin(\pi)| \leq \pi|x - 1|$$

en déduire que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$$

4. Conclure quant à la convergence uniforme de (g_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 270: [Fre10b, p. 134]

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur \mathbf{R}_+ .
2. Soit $a > 0$. Montrer qu'il y a convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$.
3. Calculer $f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

En déduire qu'il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) sur \mathbf{R}_+ .

Exercice 271

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 2]$, on pose $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 2]$. Y a-t-il convergence simple sur $[0, 2]$?
2. (a) Montrer que :

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$

(b) En déduire que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 2]$.

3. Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 2-a]$.

Exercice 272: BEOS 3063 CCE Mines PC 2017 - poly CCINP 2024

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$.
2. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?
3. Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, 1]$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente.
5. Déterminer un équivalent de u_n (on pourra effectuer un changement de variable).

Exercice 273: CCP MP 2018 - Poly CCINP 2024

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$$

Exercice 274


Etudier la convergence simple et uniforme sur \mathbf{R} de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ où :

$$f_n(x) = \cos x \sin^n x.$$

Exercice 275

On pose $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

1. Etudier la convergence simple puis uniforme de (f_n) .
2. La limite f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$? Les fonctions f_n sont-elles de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$?
3. Rappeler le théorème de dérivation d'une suite de fonctions. Montrer que ses hypothèses ne sont pas toutes vérifiées.

Exercice 276:  [Mer99]

Soit f continue sur \mathbf{R} , F une primitive de f . On pose, pour $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{nx}{2} \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F\left(x - \frac{1}{n}\right) \right)$$

Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de \mathbf{R} .

Exercice 277: Une version du théorème d'Ascoli

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ et dont les dérivées sont uniformément bornées, c'est-à-dire :

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}, \|f'_n\|_\infty \leq M.$$

1. Montrer que les f_n et f sont toutes M -lipschitziennes.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

3.7.2 Séries de fonctions**Exercice 278**

On pose, pour $x \in \mathbf{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

Donner le domaine de définition de S et étudier la continuité et la dérivabilité de S sur ce domaine.

Exercice 279

On pose, pour tout $x > 0, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est continue sur \mathbf{R}_+^* .
2. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}_+^* .
3. Calculer $S(1)$.
4. Montrer que, pour $x > 0, xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.
5. Donner un équivalent en S en 0 et en $+\infty$.

Exercice 280: BEOS 4067 Mines PC 2018

1. Montrer qu'on définit bien une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} par les relations :

$$\forall x \in [0, 1], \quad u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0, 1], \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

2. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

3. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$. La fonction limite sera notée u .
4. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la fonction u n'est pas identiquement nulle.

Exercice 281: BEOS 7701 CCINP MP 2022

On pose :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad u_n(x) = n^x e^{-nx} \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

- Déterminer l'ensemble de définition D de S .
- S est-elle continue sur D ?
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
- La série $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur D ?
- Montrer que S est de classe C^1 sur D et calculer $S'(x)$.

Exercice 282: [Sau, p. 11]

Etude de la somme de la série de fonctions donnée par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

Exercice 283

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f et les variations de f sur ce domaine.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f admet une limite en 0 (éventuellement infinie), et déterminer cette limite (Indication. Procéder par l'absurde : supposer que cette limite ℓ est finie, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x > 0$, $\sum_{k=1}^n \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} \leq \ell$ et en déduire une contradiction).
5. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur D_f et exprimer sa dérivée k -ième.
6. Montrer que f est convexe.
7. Donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 284

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle positive décroissante. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose :

$$u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$$

1. Etudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} u_n$.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 285: [Mer99]

On considère, pour $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Etudier la continuité, puis la dérivabilité de f . On fera une étude particulière pour la dérivabilité en 0.

Exercice 286: [Mer99]

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}$$

1. Vérifier que f est bien définie sur \mathbf{R} .
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 287

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

1. Montrer que f est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} .
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$, puis quand $x \rightarrow -\infty$.

Exercice 288: [Mer99] BEOS 4428 CCP MP 2018

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs, telle que $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

On note f la fonction définie sur \mathbf{R}_+^* par,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}$$

et g la fonction définie sur \mathbf{R}_+^* par,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x}$$

1. Montrer que f et g sont bien définies et continues sur \mathbf{R}_+^* .
2. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 289: [Mer99]

Montrer que, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} e^z$$

Exercice 290: BEOS 4284/4338 Centrale MP 2018 : le même, version matricielle

Soit $p \in \mathbf{N}$. Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on note $u_n(A) = \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$.


1. Si A est diagonalisable sur \mathbf{R} , montrer que $(u_n(A))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.
2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^p$.

On note S la sphère unité associée, et pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, $N(A) = \max_{X \in S} \|AX\|$.

- (a) Montrer que N est une norme.
- (b) Montrer qu'elle est sous-multiplicative, i.e. que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R}), \quad N(AB) \leq N(A)N(B)$$

3. Généraliser la question 1 au cas A quelconque.

Exercice 291: 

Soit $x \in]0, \pi[$ fixé. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ où

$$u_n : t \mapsto t^{n-1} \sin(nx)$$

1. Etudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur $[0, 1]$.
2. Etudier la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur $[0, 1[$.
3. On pose $S_n(t) = \sum_{p=1}^n u_p(t)$, calculer explicitement $S_n(t)$.
4. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ est convergente et calculer sa valeur.

3.7.3 Suites et séries de fonctions, contre-exemples**Exercice 292: CU vers une fonction dérivable alors que (f'_n) diverge**

$$f_n : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \frac{\sin(nx)}{n} \end{cases}$$

3.8 Séries entières**3.8.1 Rayon de convergence, éventuellement calcul de la somme.****Exercice 293**

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ où

1. $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
2. $a_n = \frac{n^2}{3^n + n}$
3. $a_n = \sin(n\theta)$
4. $a_n = \cos(n\theta)$
5. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$
6. $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
7. $a_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$
8. a_n est la n -ième décimale de $\sqrt{2}$
9. a_n est le nombre de diviseurs de n
10. a_n est la somme des diviseurs de n

Exercice 294: [Mon09, p. 248]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Déterminer les rayons de convergence de $\sum a_n^2 z^n$ et $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 295

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .
Que dire du rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ où

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Exercice 296: [Fre10b, p. 242]

On considère la série entière de la variable réelle $\sum_{n \geq 2} a_n x^n$ où

$$a_n = \ln \left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right)$$

Déterminer son rayon de convergence et étudier le comportement aux bornes.

Exercice 297

Rayon de convergence et somme de la série entière :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$$

Exercice 298: BEOS 3359 CCE Mines PC 2017

On considère la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} x^n$$

Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

Exercice 299: BEOS 4139 Mines MP 2018

Rayon de convergence et somme de la série entière :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$$

où $\theta \in \mathbf{R}$.

Exercice 300: BEOS 4208 TPE MP 2018

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R , où (a_n) est une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On note R' le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} S_n z^n$.

1. Montrer que $R' \leq R$.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} S_n z^n$ est le produit de Cauchy de deux séries entières que l'on explicitera. En déduire une autre relation entre R et R' .
3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$, en précisant le domaine de validité de la formule.
4. Donner un exemple de suite (a_n) pour laquelle $R = R' = 1$, un exemple avec $R > 1$ et $R' = 1$, et un exemple avec $R = R' > 1$.

3.8.2 Calcul de DSE**Exercice 301: [Mer99]**

Déterminer les DSE des fonctions suivantes :

1. $\ln(1 + x + x^2)$
2. $(\arcsin(x))^2$
3. $\sin^2(x)$

3.8.3 Equation différentielle**Exercice 302: BEOS 4349 Mines-Télécom PC 2018/RMS 864 Mines PC 2016**

On définit f par

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

1. Montrer que f est développable en série entière, et préciser le rayon de cette série.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. En déduire le développement en série entière de f .
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 303: [Fre10b, p. 252]

On pose

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f possède un développement en série entière. Quel est son rayon de convergence ?
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f puis calculer le développement en série entière de f .
3. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

3.8.4 Autres**Exercice 304: BEOS 4551 Mines MP 2018 - Principe des zéros isolés**

Soit $(z_p)_{p \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ une suite de complexes non nuls qui converge vers 0.

1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad f(z_p) = 0$$

Montrer que $a_n = 0$ pour tous $n \in \mathbf{N}$.

2. Que dire de deux séries entières f et g de même rayon de convergence telles que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout p ?

Exercice 305: BEOS 4579 Mines MP 2018

Soit (a_n) une suite de complexes non nuls telle qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+k}}{a_n} \right| = \ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Exercice 306: [Gou08, p. 252]

Soit $1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul, et S la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Montrer que $1/S$ est développable en série entière autour de l'origine.

Indication : commencer par montrer qu'une série entière $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement s'il existe $q > 0$ tel que $|u_n| \leq q^n$ pour tout n .

Exercice 307: BEOS 4305 Centrale MP 2018

On note $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon supérieur à 1 telle que les a_n soient tous réels, $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. On note f sa somme sur le disque unité ouvert D . On suppose, de plus, que f est injective sur D .

1. Montrer que, pour tout $z \in D$,

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbf{R}$$

2. Montrer que, pour tout $z \in D$,

$$\Im(z) > 0 \Leftrightarrow \Im(f(z)) > 0$$

($\Im(z)$ = partie imaginaire de z)

3. Soit $0 < r < 1$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer, en fonction de n et r , la quantité :

$$\int_0^\pi \Im(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) d\theta$$

4. En remarquant que $|\sin(n\theta)| \leq n \sin(\theta)$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$, montrer que $|a_n| \leq n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
5. Vérifier que $z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$ est développable en série entière et vérifier que celle-ci vérifie les hypothèses de l'énoncé. En déduire que la majoration obtenue est optimale.

Exercice 308: HP

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 1$. On note f sa somme sur le disque ouvert de convergence. On suppose que tous les a_n soient des entiers relatifs et que f est bornée sur le disque unité.

Montrer que f est une fonction polynomiale.

3.9 Probabilités

3.9.1 Probabilités

Exercice 309: BEOS 4241 Mines-Télécom PC 2018

Soit 2 urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires.

On choisit une urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2.

Soit l'évènement B_n : « tirer une blanche au n -ième tirage » et p_n la probabilité de cet évènement.

1. Calculer p_1 .
2. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n .
3. Calculer p_n en fonction de n .

Exercice 310

On lance indéfiniment un dé équilibré.

1. Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir un six.
2. Quelle est la probabilité que tous les lancers qui ont précédé le premier six (obtenu presque sûrement) soient distincts de un ?

Exercice 311

Des boules en nombre infini numérotées $1, 2, \dots$ sont placées successivement et indépendamment les unes des autres dans trois boîtes.

1. On note, pour $n \geq 2$, A_n l'évènement : « deux des trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsque l'on place la n -ième boule ». Calculer $P(A_n)$.
2. Montrer que l'évènement A : « toutes les boules sont dans la même boîte » est négligeable.
3. On note, pour $k \geq 3$, B_k l'évènement : « les trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsque l'on place la k -ième boule ».

Calculer $P(B_k)$ en utilisant la formule des probabilités totales, puis calculer $\sum_{k=3}^{\infty} P(B_k)$. Interpréter.

Exercice 312: BEOS 4590 Mines PC 2018 - Deux fois pile

On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est p . On note A_n l'évènement "au n -ième lancer, on fait pour la première fois deux piles consécutifs". On note a_n la probabilité de cet évènement.

1. Calculer a_1 , a_2 et a_3 .
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant les cas suivant le résultat du premier lancer, trouver une relation reliant a_{n+2} à a_{n+1} et a_n .
3. Pourquoi est-il quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs ?
4. Déterminer, pour $p = 2/3$, le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

Exercice 313: BEOS 4252 Mines MP 2018

On munit $\{1, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme. Pour $d \mid n$, on note

$$A_d = \{k \in \{1, \dots, n\}; d \mid k\}$$

1. Calculer $P(A_d)$.
2. Si p_1, \dots, p_r sont les diviseurs premiers de n , montrer que les A_{p_i} pour $1 \leq i \leq r$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire la valeur de l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$.
4. Pour $d \mid n$, on note

$$B_d = \{k \in \{1, \dots, n\}; \gcd(k, n) = d\}$$

Calculer $P(B_d)$ et en déduire la formule :

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

puis :

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

Exercice 314: BEOS 4551 Mines MP 2018

On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers et, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

1. Quelle valeur doit prendre $\lambda \in \mathbf{R}$ pour que $P(\{n\}) = \lambda n^{-s}$ définisse une loi de probabilité sur \mathbf{N}^* ?
2. On note, pour $p \in \mathcal{P}$, $A_p = p\mathbf{N}^*$.
Montrer que les A_p sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité définie précédemment.
3. Montrer que

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p} = \{1\}$$

En déduire que

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

4. La famille des $\left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathcal{P}}$ est-elle sommable ?
5. (Bonus) Peut-on construire une loi de probabilité sur \mathbf{N}^* muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbf{N}^*)$ telle que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $P(m\mathbf{N}^*) = \frac{1}{m}$?

Exercice 315

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

On note A_n l'évènement : "les n premières boules tirées sont rouges", avec la convention $P(A_0) = 1$.

1. Calculer $P_{A_{n-1}}(A_n)$.
2. En déduire, par formule des probabilités composées, la valeur de $P(A_n)$.
3. Déterminer la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges.
4. Cette probabilité reste-elle la même si, au lieu de remettre la boule accompagnée de *deux* autres boules de la même couleur, on la remet accompagnée de *trois* autres boules de la même couleur?

Exercice 316

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

On note A_n l'évènement : « les n premières boules tirées sont rouges », avec la convention $P(A_0) = 1$.

1. Calculer $P_{A_{n-1}}(A_n)$.
2. En déduire, par formule des probabilités composées, que

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

3. On rappelle la formule de Stirling

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Déterminer la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges.

4. Cette probabilité reste-elle la même si, au lieu de remettre la boule accompagnée de *deux* autres boules de la même couleur, on la remet accompagnée de *trois* autres boules de la même couleur?

Exercice 317: Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'évènements. On définit :

$$\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p=n}^{+\infty} A_p \quad \text{et} \quad \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$$

Concrètement, $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ correspond à l'ensemble des éléments qui sont dans une infinité de A_n et $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$ correspond à l'ensemble des éléments qui sont dans tous les A_n à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ sont bien des évènements.
2. Montrer que $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$
3. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ converge. Montrer que $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est négligeable.
4. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants, et que $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ diverge. Montrer que $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est presque sûr.

3.9.2 Variables aléatoires**Exercice 318**

Un apprenant récalcitrant lance 5 chaises sur son professeur malveillant. Lors de chaque lancer, la probabilité que l'élève atteigne sa cible est égale à 0,4. On suppose que les 5 lancers sont indépendants et on note X le nombre de chaises que le professeur reçoit sur la tête.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
2. Quelle est la probabilité que le professeur reçoive
 - (a) Exactement deux chaises sur la tête
 - (b) Au moins une chaise sur la tête
 - (c) Au plus une chaise sur la tête
3. Calculer $E(X)$ puis interpréter le résultat obtenu.
4. On suppose maintenant que cet apprenant très énervé lance n chaises sur son médiateur des apprentissages. Combien de chaises doit-il lancer pour avoir plus de 99% de chances d'atteindre au moins une fois ce fonctionnaire malveillant ?

Exercice 319: Un petit calcul

On dispose d'une urne contenant N boules indiscernables numérotées de 1 à N .

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise, et on note X le plus grand numéro obtenu.

1. Calculer $P(X \leq k)$ et en déduire $E(X)$.
2. Calculer

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(X)}{N}$$

Exercice 320

On considère n marins qui, après une nuit de festivités, retournent sur leur navire et rentrent chacun aléatoirement et indépendamment les uns des autres^a dans une des r cabines du bateau. On suppose qu'ils choisissent une cabine selon la loi uniforme. Quel est le nombre moyen de cabines vides ?

^a. cela sous-entend indépendamment *tous* les uns des autres, i.e. les événements associés sont mutuellement indépendants

Exercice 321: Des petits calculs

1. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent une loi de géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose

$$A = \begin{bmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

2. **BEOS 2917 Centrale PC 2016**

Une poule pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Chaque oeuf a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'éclore, indépendante des autres oeufs.

On note Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

Déterminer la loi de Z .

3. **BEOS 2302 Mines PC 2016**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$.

- (a) Trouver la loi du couple (U, V) .
 (b) En déduire les lois de U et de V .

4. **BEOS 2510 Mines PC 2016**

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N}^* telles que $X \leq Y$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi conditionnelle de X par rapport à l'événement $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

Montrer que $Y - X + 1$ et X suivent la même loi.

Exercice 322: BEOS 3069 CCP PC 2017

Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable X suit une loi $G_{\mathbf{N}}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et si pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P(X = k) = pq^k$ avec $q = 1 - p$. On note $X \sim G_{\mathbf{N}}(p)$.

1. Soit $X \sim G_{\mathbf{N}}(p)$. On pose $S = X + 1$. Quelle est la loi de S ? En déduire l'espérance de X .
2. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $G_{\mathbf{N}}(p)$. On note $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z et donner son espérance.
3. On lance une pièce avec une probabilité de faire Pile égale à $p \in]0, 1[$.
Pour tout entier naturel non nul i on note F_i l'événement "on obtient Face au i ème lancer". Les lancers sont indépendants.
Soit T la variable aléatoire qui donne le nombre de Face avant le premier Pile. Exprimer $(T = k)$ en fonction de F_i .
Déterminer la loi de T et son espérance.
4. On reprend X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $G_{\mathbf{N}}(p)$. On note $M = \min(X, Y)$ et $D = |X - Y|$.
Calculer $P(M = k, D = i)$ et en déduire la loi de D .

Exercice 323: BEOS 3483 Centrale PC 2017 - Deux fois pile

On effectue des lancers indépendants d'une pièce, avec une probabilité $2/3$ d'obtenir pile.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs (et l'expérience s'arrête).
Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 324: [Sau]

1. Soit X une variable aléatoire discrète réelle, $a \in \mathbf{R}$ et $t > 0$.
Montrer que

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta} \mathbf{E}(e^{tX})$$

2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées prenant les valeurs -1 et 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- (a) Montrer que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) = \mathbf{E}(e^{tX_1})^n \leq e^{nt^2/2}$$

et en déduire, pour $a > 0$,

$$P(S_n \geq a) \leq e^{-a^2/2n}$$

- (b) Donner en particulier une majoration de $P(S_{10} \geq 6)$ et comparer à la valeur exacte.

Exercice 325

Soit X une variable aléatoire discrète centrée de variance σ^2 finie.

1. Montrer que, pour $a, b > 0$,

$$P(X \geq a) \leq P[(X + b)^2 \geq (a + b)^2]$$

2. En déduire

$$P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

et comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 326: Pot pourri sur les permutations

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On munit \mathfrak{S}_n de la probabilité uniforme.

- Quelle est la loi de la variable aléatoire qui, à une permutation de \mathfrak{S}_n , associe sa signature? Sa variance, son espérance?
- Quelle est la loi de la variable aléatoire qui, à une permutation de \mathfrak{S}_n , associe son nombre de points fixes? Sa variance, son espérance?
- On note S_n le nombre d'involutions de \mathfrak{S}_n .
 - Montrer que pour tout $n \geq 2$, $S_{n+1} = S_n + nS_{n-1}$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{n}{2k}$$

- Calculer la probabilité p_n qu'une permutation de \mathfrak{S}_n soit une involution.
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 327: ☼

A quelle condition une variable aléatoire discrète X est-elle indépendante d'elle-même?

Exercice 328: RMS 128-3-119 ENS ULCR MP 2017

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On suppose qu'il existe des réels $a \geq 0$ et $b \neq 0$ tels que $X \sim aX + b$. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 329: 📄 RMS 128-3-338 ENS PSI 2017

On dispose d'une pièce de monnaie pipée mais on ignore comment.
Déterminer comment réaliser avec cette pièce une expérience aléatoire de probabilité $1/2$.

Exercice 330: BEOS 3671 ENS MP 2017

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires telles que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \sim U(\{1, \dots, n\})$.

On considère la variable aléatoire $S_n = (1 X_1)(1 X_2) \cdots (1 X_n)$ à valeurs dans \mathfrak{S}_n .

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Calculer $P(S_n = \sigma)$.

2. Soit S_n une variable aléatoire à valeurs dans \mathfrak{S}_n , vérifiant $S_n \sim U(\mathfrak{S}_n)$.

Notons X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes de S_n , à valeurs dans \mathbf{N} .

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{e}$$

3.9.3 Fonctions génératrices**Exercice 331: BEOS 3375 Mines-Télécom PC 2017**

Peut-on truquer deux dés (à 6 faces) pour que la somme suive une loi uniforme?

Exercice 332: Essentiellement le même

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbf{N} . Calculer la fonction génératrice de $X + Y$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbf{N} telles que

$$\forall n \geq 6, \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = 0$$

Montrer que la fonction génératrice de $X + Y$ ne peut pas être de la forme

$$G_{X+Y}(t) = a(1 + t + t^2 + \dots + t^{10})$$

où $a \in \mathbf{R}^*$.

3. Peut-on truquer deux dés (à 6 faces) pour que la somme suive une loi uniforme?

Exercice 333

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et Y une autre variable aléatoire, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Soit Z la variable aléatoire valant 0 si X vaut 0, et Y si X vaut 1.

- Déterminer la loi de Z .
- Quelle est la fonction génératrice de Z ? Son espérance? Sa variance?
- Calculer $\mathbb{P}(X = i | Z = 0)$, pour $i = 0, 1$.

Exercice 334: BEOS 3110 Centrale PC 2017

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.
 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Donner la loi de S_n .
2. Dans quelle mesure peut-on dire que S_n/n est proche de p ? Démontrer l'énoncé de cours utilisé.
3. Soit $t \in \mathbf{N}$. On lui associe la variable aléatoire

$$N_t = \text{card} \{k \in \mathbf{N}^* \mid S_k \leq t\}$$

On remarque alors l'égalité :

$$(N_t = k) = (S_k = t) \cap (S_{k+1} > t)$$

Déterminer la loi de N_t .

4. Déterminer la fonction génératrice de N_t et en déduire que N_t est fini presque sûrement.

Exercice 335: RMS 638/764 Mines MP 2017

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N} admettant des moments à tous les ordres.

1. Montrer que la fonction génératrice de X est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-1, 1]$.
2. On suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} P(X = n) = \frac{1}{k!}$$

Déterminer la loi de X .

Exercice 336: RMS 139/156 ENS Ulm MP 2017

On rappelle, ou pas, qu'une suite de variables aléatoires (X_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire X si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, strictement positives, toutes d'espérance 1.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

Montrer que (P_n) converge en probabilité vers 0 si et seulement si $\prod_{k=1}^n E(\sqrt{X_k}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Indication : pour montrer le sens direct, on pourra prouver puis utiliser l'inégalité de Paley-Zygmund :

• Si X est une variable aléatoire discrète réelle à valeurs strictement positives, admettant un moment d'ordre 2, alors pour tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$P(X \geq \lambda E(X)) \geq \frac{(1 - \lambda)^2 E(X)^2}{E(X^2)}$$

3.10 Algèbre générale

3.10.1 Groupes

Le début, avec seulement la définition de la loi et les premières propriétés

Exercice 337: ☼

Montrer que tout groupe G tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$ est abélien.

Exercice 338: BEOS 6924 Mines-Ponts MP 2022 – une extension du précédent

Soit (G, \cdot) un groupe tel que pour tout $g \in G$, on ait $g^2 = e$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Montrer que, si de plus G est fini, alors il est de cardinal une puissance de 2.

Exercice 339

Soit S un ensemble non vide muni d'une loi interne associative, telle que pour tous $a, b \in S$, les équations $a \cdot x = b$ et $y \cdot a = b$ admettent une solution.

Montrer que S est un groupe.

Exercice 340: ☼

Montrer que \mathbb{U} l'ensemble des complexes de module 1, est le plus grand sous-groupe borné de \mathbb{C}^* .

La suite, avec un peu plus de structure, notamment groupes cycliques

Exercice 341: Révisions de cours - groupes

Soit (G, \cdot) un groupe.

1. Rappeler la définition de l'ordre d'un élément de G , ainsi que la définition du sous-groupe engendré par un élément et sa description explicite.
2. Rappeler la définition d'un groupe monogène/cyclique.
3. Rappeler pourquoi tout groupe monogène est commutatif.
4. Rappeler pourquoi tout groupe d'ordre (i.e. de cardinal) un nombre premier est cyclique.
5. Redémontrer qu'un groupe cyclique est toujours isomorphe à un certain $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 342

Soient G_1, \dots, G_n des groupes cycliques d'ordres respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les α_i pour que le groupe $G = G_1 \times \dots \times G_n$ soit cyclique

Exercice 343: BEOS 8403 Mines MP 2024

Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Exercice 344:  BEOS 4247 Mines MP 2018

Déterminer le plus petit entier n tel qu'il existe un groupe de cardinal n non commutatif.

Exercice 345

Montrer que $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 346: BEOS 4527 ENS MP 2018 - adapté

1. Montrer que les sous-groupes de \mathbf{R} sont soit finis soit denses.
2. Montrer que $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ est dense si et seulement si $\frac{a}{b}$ est irrationnel.
3. Classifier les sous-groupes de \mathbf{U} .

Exercice 347: Une idée d'exercice

Quelques notions de base de théorie des caractères. Voir <https://beos.prepas.org/sujet.php?id=7766>.

3.10.2 Anneaux, idéaux, algèbres**Exercice 348: Révisions de cours - anneaux**

Dans toutes ces questions de cours on prendra bien soin de se rappeler de quelles lois on parle, quelle est la structure et prendre les bonnes notations.

1. Soit $n, m \geq 2$.
 - (a) Rappeler pourquoi, pour $k \in \mathbf{Z}$, $\bar{k} \in \mathcal{U}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ si et seulement si $k \wedge n = 1$.
 - (b) En déduire que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.
 - (c) (Re-)démontrer le théorème chinois : si $n \wedge m = 1$, alors $\mathbf{Z}/nm\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.
2. (Indicatrice d'Euler) Soit encore $n, m \geq 2$. On note $\varphi(n) = \text{Card}(\mathcal{U}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}))$ l'indicatrice d'Euler.
 - (a) Pour $k \in \mathbf{Z}$, premier avec n , rappeler pourquoi $k^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
 - (b) Montrer que, si $m \wedge n = 1$, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
 - (c) Calculer $\varphi(n)$ lorsque $n = p^\alpha$ avec p premier et $\alpha \in \mathbf{N}^*$.
 - (d) On note $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de n . Montrer que :

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_r^{\alpha_r-1} (p_1 - 1) \cdots (p_r - 1).$$

Exercice 349: BEOS 4025 Mines-Télécom MP 2018

1. Déterminer les morphismes d'anneaux continus de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .
2. Même question, mais en retirant l'hypothèse de continuité.

Exercice 350: BEOS 2718 CCP MP 2016

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A . On appelle radical de I l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbf{N}^*, x^n \in I\}$$

1. (a) Montrer que \sqrt{I} est un idéal et qu'il contient I .
(b) Déterminer le radical de $\{0\}$ et de A .
2. (a) Soit I et J des idéaux de A . Montrer que

$$I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$$

- (b) Soit I et J des idéaux de A . Montrer que

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

- (c) Soit I un idéal de A . Montrer que

$$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$$

- (d) Déterminer le radical d'un idéal de \mathbf{Z} .

Exercice 351: BEOS 7042 Mines-Télécom MP 2022

Soit A un anneau abélien. On dit qu'un idéal I de A est premier si :

$$\forall x, y \in A, \quad xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Montrer qu'un anneau abélien dont tous les idéaux sont premiers est intègre, puis que c'est un corps (on pourra considérer l'idéal engendré par un élément bien choisi).

Exercice 352: Adapté de BEOS 4550 Mines MP 2018

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout entier a premier avec n ,

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

2. Montrer que pour tout a entier

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Exercice 353

Soit A un anneau, on note 1 son neutre pour la loi multiplicative. Soit $x \in A$ nilpotent.

1. Montrer que $1 - x$ est inversible.
2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, simplifier l'expression

$$U_n := \prod_{k=0}^{n-1} (1 + x^{2^k})$$

Exercice 354: BEOS 8422 Mines-Télécom MPI 2024

Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ dans $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ et dans $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, en évitant de tester toutes les valeurs possibles...

1. Pour la résolution dans $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$, on pourra commencer par écrire le trinôme sous forme canonique.
2. Pour la résolution dans $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, on pourra commencer par justifier qu'il n'y a pas de solution dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et conclure.

Exercice 355

Soit $p, q > 2$ deux entiers premiers entre eux. Montrer que l'équation $x^2 = -1$ admet une solution autre que -1 et 1 dans $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$.

Exercice 356: Autour des carrés de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Voir aussi BEOS 5659

Soit $a \in \mathbf{Z}$, et p un nombre premier impair. On dit que a est un *carré modulo p* , ou que \bar{a} est un *carré* dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, s'il existe $x \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$a \equiv x^2 [p]$$

On note \mathcal{C} l'ensemble des carrés non nuls dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

1. (a) Quelle est la structure algébrique de \mathcal{C} ?
 (b) Justifier qu'il y a au plus $\frac{p-1}{2}$ éléments dans \mathcal{C} .
 (c) Soit $x, y \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. A quelle condition a-t-on $x^2 = y^2$? En déduire que \mathcal{C} contient au moins $\frac{p-1}{2}$ éléments.
 (d) En déduire que dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ il y a exactement $\frac{p+1}{2}$ carrés.
2. Montrer que, pour $x \in \mathbf{Z}$, $\bar{x} \neq 0$ est un carré modulo p si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$.
3. Montrer que -1 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 1 [4]$.

Exercice 357: BEOS 3200 Mines MP 2017

Soit a un nombre impair positif et n un entier supérieur à 3.

1. Montrer que

$$a^{2^{n-2}} \equiv 1 (2^n)$$

2. En déduire les entiers n pour lesquels le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ est cyclique.

Exercice 358: BEOS 4150 ENS MP 2018

Soit A un anneau commutatif possédant n diviseurs de zéro, avec $n > 1$.

1. Montrer que A a au plus $(n+1)^2$ éléments.
2. Trouver une infinité d'anneaux A ayant exactement $(n+1)^2$ éléments, où n est le nombre de diviseurs de diviseurs de 0 dans A (bien comprendre que n n'est plus fixé).

Exercice 359: Même que le précédent, mais détaillé

1. Soit G et H deux groupes et $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. En considérant la relation d'équivalence sur G donnée par :

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Montrer que, si $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont tous les deux finis, G l'est aussi et $|G| = |\ker(f)| \cdot |\text{Im}(f)|$.

2. Soit A un anneau commutatif. Notons D l'ensemble des diviseurs de zéro dans A , et n le nombre de diviseurs de zéro. On suppose $n > 1$.

- (a) En fixant $a \in D$ arbitraire et en considérant l'application :

$$\tau_a : \begin{cases} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax \end{cases}$$

montrer que A a au plus $(n+1)^2$ éléments.

- (b) Trouver une infinité d'anneaux A ayant exactement $(n+1)^2$ éléments, où n est le nombre de diviseurs de zéro dans A (bien comprendre que n n'est plus fixé).

On pourra commencer par calculer le nombre de diviseurs de zéro dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ pour $m \in \mathbf{N}^*$ quelconque.

Exercice 360

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

2. Soit K un corps (commutatif) fini. Montrer que le groupe multiplicatif K^* est cyclique.

Exercice 361

Les polynômes cyclotomiques sont à coefficients entiers.

3.11 Réduction

3.11.1 Éléments propres, polynôme caractéristique

Exercice 362

Elements propres de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 363: [Sau]

On note E l'ensemble des fonctions continues de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R} ayant une limite nulle en $+\infty$, et T l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbf{R}_+, \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

Déterminer le spectre de T .

Exercice 364

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On pose $B = A - I_3$.

1. Déterminer le rang et les valeurs propres de B .
2. En déduire les valeurs propres de A .
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 365

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer le rang de $A + I_3$, et en déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.
2. Trouver toutes les valeurs propres de A .
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 366

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres de A .
2. Calculer $(A - 3I_3)^2$ et en déduire une base de $\ker(A - 3I_3)^2$.
3. Montrer que $\ker(A - 3I_3)^2$ et $\ker(A + I_3)$ sont supplémentaires dans \mathbf{R}^3 .
4. A est-elle diagonalisable?
5. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = B$ où

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Déterminer B^n pour $n \in \mathbf{N}$.
7. En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 367

1. On pose

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. On considère l'application

$$f : \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array} \right] \end{array}$$

Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés (on pourra éventuellement utiliser la question précédente)

3.11.2 Diagonalisabilité, trigonalisabilité**Suis-je diagonalisable/trigonalisable ?****Exercice 368:** ☹

Soit $A \in \text{GL}_n(K)$ et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que AB soit diagonalisable. Montrer que BA l'est aussi.

Exercice 369

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de rang 1.

1. Donner une expression du polynôme caractéristique de A .
2. En déduire que $\det(A + I_n) = 1 + \text{tr}(A)$.
3. Discuter, suivant la valeur de $\text{tr}(A)$, de la diagonalisabilité de A .

Exercice 370

On pose, pour $m \in \mathbf{R}$,

$$A_m = \begin{bmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle diagonalisable ?
2. Donner, selon les valeurs de m , le polynôme minimal de A_m .

Exercice 371

A quelle condition sur les réels a, b, c, d, e, f la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 372

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), M \mapsto \text{tr}(M)I_n - M$.
Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice 373: BEOS 1425 Banque PT 2015

On note $E = \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$ l'ensemble des endomorphismes de \mathbf{C} considéré comme un espace vectoriel réel.

1. Montrer que

$$E = \{\varphi_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z}, (a, b) \in \mathbf{C}^2\}$$

2. Exprimer en fonction de a et b le déterminant et la trace de $\varphi_{a,b}$.

3. Déterminer une CNS sur a, b pour que $\varphi_{a,b}$ soit diagonalisable.

Exercice 374

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et u l'application qui, à $P \in \mathbf{R}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

2. Déterminer les éléments propres de u .

3. u est-elle diagonalisable ?

Exercice 375

Soit $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de rang 2, de trace nulle et telle que $A - I_n$ ne soit pas inversible.

1. A admet-elle 0 pour valeur propre ?

2. Déterminer le spectre de A . A est-elle diagonalisable ?

Exercice 376

Soit $n \geq 2$. Soit f l'application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ par

$$f(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X - 1)P'$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.

2. Déterminer le spectre de f .

f est-elle diagonalisable ?

Exercice 377

Soit $n \geq 2$ et

$$A = \begin{bmatrix} b & & a \\ & \ddots & \\ a & & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

avec $a \neq 0$.

1. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où tous les coefficients sont égaux à 1.
Exprimer A , puis A^2 , en fonction de I_n et J .
En déduire un polynôme annulateur de A .
2. A est-elle diagonalisable sur \mathbf{R} ? Déterminer ses éléments propres.
3. Calculer $\det(A)$.

Exercice 378

Condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbf{C}$ pour que

$$M = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

soit diagonalisable sur \mathbf{C} .

Exercice 379: Version détaillée du précédent

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbf{C}$ pour que

$$M_z = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

soit diagonalisable sur \mathbf{C} .

1. On suppose que M_z n'est pas diagonalisable.
 - (a) Justifier que χ_{M_z} admet au moins une racine double, que l'on notera $t \in \mathbf{C}$.
 - (b) Justifier que $\chi'_{M_z}(t) = 0$ et montrer que l'on a $t^2 = z$.
 - (c) Montrer que $z \in \{0, 1\}$.
2. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que M_z soit diagonalisable.

Exercice 380: [Des01, p. 255, sp. 1131]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et

$$B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C})$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A .
2. Discuter de la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A .

Applications

Exercice 381

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable. On note $C(A)$ son commutant :

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid AM = MA\}$$

Déterminer la dimension de $C(A)$.

Exercice 382

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme f de E dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.
2. On suppose, dans cette question seulement, que f est un endomorphisme de E diagonalisable. Justifier que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.
3. Soit f un endomorphisme de E . Montrer qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$\text{Im}(f^k) \oplus \ker(f^k) = E$$

Exercice 383: [Des01, p. 258, sp. 1140]

Soit $p > 1$ et $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ une famille de p éléments d'un corps K . On note

$$C = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

la matrice circulante associée.

1. Calculer le déterminant de C lorsque $K = \mathbf{C}$ (on diagonalisera la matrice circulante U associée à $(0, 1, 0, \dots, 0)$).
2. Calculer le déterminant de C lorsque $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ avec p premier (on pourra admettre, pour cette question, le théorème de Cayley-Hamilton).

3.11.3 Fin, avec polynômes d'endomorphismes**Exercice 384: ☼**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle qu'il existe $P \in \mathbf{K}[X]$ annulant A et tel que $X \nmid P$.
Montrer que A est inversible.

Exercice 385

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$A^3 = A^2 - 4A + 4I_n \quad \text{et} \quad A \neq I_n.$$

1. Montrer que 1 est la seule valeur propre réelle possible de A . Quelles peuvent être les valeurs propres complexes de A ?
2. A est-elle diagonalisable sur \mathbf{R} ? sur \mathbf{C} ?
3. On suppose désormais que 1 n'est pas valeur propre de A .
 - (a) Déterminer le polynôme minimal de A sur \mathbf{R} , puis sur \mathbf{C} .
 - (b) Montrer que $A^2 + 4I_n = 0$ et en déduire que n est pair.

Exercice 386: 🎯 BEOS 4268 Centrale MP 2018

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , où $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . Soit f un endomorphisme de E .

1. Rappeler pourquoi f admet un polynôme annulateur non nul sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Donner la définition de $\exp(f)$. Montrer que $\exp(f)$ est un polynôme en f .
3. Montrer que, si f est bijectif, alors f^{-1} est encore un polynôme en f .

Exercice 387: [Des01]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$A^3 - 3A - 4I_n = 0$$

Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 388: 📄 BEOS 4438 X MP 2018

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, à coefficients positifs, et telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$$

On dit que P est stochastique (sur les lignes).

1. Montrer que 1 est valeur propre de P
2. Montrer que le spectre de P est inclus dans le disque du plan complexe de centre $m := \min_{1 \leq i \leq n} p_{ii}$ et de rayon $1 - m$.
3. On suppose de plus que $m > 0$ et que 1 est valeur propre simple.
Montrer que la suite $(P^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers une matrice stochastique.

Exercice 389: [Des01, p. 255, sp. 1129]

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n et λ une valeur propre de u .
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id})^2$
2. $E_\lambda(u) \oplus \text{Im}(u - \lambda \text{Id}) = E$
3. $E_\lambda(u)$ possède un supplémentaire u -stable.
4. La dimension de $E_\lambda(u)$ égale la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de u .
5. λ est racine simple du polynôme minimal de u

Montrer que, dans ces conditions, $\text{Im}(u - \lambda \text{Id})$ est le seul supplémentaire de $E_\lambda(u)$ stable par u .

Exercice 390: [Des01, p. 257, sp. 1137]

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = BA$.

On note $M \in \mathcal{M}_{2n}(K)$ la matrice par blocs suivante :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0$.

Exercice 391: BEOS 6575/6690 Centrale MP 2022

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note :

$$GL_n(\mathbf{Z}) = \{M \in GL_n(\mathbf{R}) \mid M \text{ et } M^{-1} \text{ sont à coefficients dans } \mathbf{Z}\}$$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficients entiers, montrer que $M \in GL_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si $|\det M| = 1$.
Montrer que $GL_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $d \in \mathbf{N}$ tels que $M^d = I_n$. On pose $A = \frac{1}{3}(M - I_n)$. Étudier la convergence de la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$.
3. Montrer qu'il existe un entier K_n majorant le cardinal des sous-groupes finis de $GL_n(\mathbf{Z})$.

Exercice 392: BEOS 8044 Magistère Rennes MP 2024

1. Décomposer en produit de facteurs irréductibles le polynôme $X^5 - 1$ dans $\mathbf{C}[X]$, dans $\mathbf{R}[X]$, puis enfin dans $\mathbf{Q}[X]$.
2. En déduire que le groupe $GL_2(\mathbf{Q})$ ne contient pas d'élément d'ordre 5.

Exercice 393: $GL_n(K) \simeq GL_m(K)$ si et seulement si $m = n$

Soit K un corps de caractéristique différente de 2.

On veut montrer que $GL_n(K)$ est isomorphe à $GL_m(K)$ si et seulement si $m = n$.

1. Supposons que G soit un sous-groupe de $GL_n(K)$ tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = I_n$. Montrer qu'alors, $|G| \leq 2^n$.
2. Achever la preuve.

Exercice 394

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ telle qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ vérifiant $M^k = I_2$.
Montrer que $M^{12} = I_2$

3.12 Espaces euclidiens**3.12.1 Généralités et endomorphismes/matrices orthogonaux****Exercice 395: BEOS 4390 CCP PC 2018**

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ du produit scalaire défini par $(M | N) = \text{tr}({}^tMN)$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(x) - 1 & 4 \\ -2 & \sinh(x) \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} \cosh(x) + 1 & 3 \\ 6 & -\sinh(x) \end{bmatrix}$$

1. A-t-on $(A | B) = 0$?
2. Montrer que l'espace des matrices symétriques $S_2(\mathbf{R})$ et celui des matrices antisymétriques $A_2(\mathbf{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
3. Déterminer la distance de A à $S_2(\mathbf{R})$.

Exercice 396: BEOS 2294 CCP PC 2016

Dans \mathbf{R}^3 , soit p la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$.

Déterminer la matrice de p dans la base canonique, puis celle de s , la symétrie orthogonale par rapport à P .

p est-elle une isométrie? s est-elle une isométrie?

Exercice 397: ☉

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que $\ker(A) = \ker({}^tA)$.
Comparer $\ker(A)$ et $\ker(A^2)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si

$$\forall X \in \mathbf{R}^n, \quad (AX | X) = 0$$

où $(\cdot | \cdot)$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbf{R}^n .

Exercice 398: BEOS 920 Télécom Sud Paris PT 2014 / BEOS 745 CCE Mines PC 2014

Soit $A \in O_n(\mathbf{R})$.

Montrer que la somme de tous les coefficients de A est inférieure à n .

Bonus : étudier le cas d'égalité si on suppose de plus que tous les coefficients de A sont positifs.

Exercice 399: [Des01]

CNS sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que

$$M = \begin{bmatrix} 2a^2 - 1 & 2ba & 2ac \\ 2ab & 2b^2 - 1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 \end{bmatrix}$$

soit la matrice d'un retournement.

Exercice 400: BEOS 4479 CCP PC 2018

Soit E un espace euclidien de dimension n et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$$

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E .

1. Calculer, pour $1 \leq i, j \leq n$, $(f(e_i + e_j) \mid f(e_i - e_j))$.
2. Montrer qu'il existe un réel positif α tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \|f(e_i)\| = \alpha$$

3. On suppose de plus que f n'est pas l'endomorphisme nul.
 f est-il bijectif? Est-ce un automorphisme orthogonal?

Exercice 401: BEOS 3812 TPE PC 2017

Soit E un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

1. Montrer que f conserve la norme.
2. Montrer que f conserve le produit scalaire.
3. Montrer que f est linéaire.
4. Qu'en déduire sur f ?

Exercice 402: BEOS 3443 Mines MP 2017

Soit E un espace euclidien, et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leq \|x\|$$

On définit l'adjoint de f , noté f^* , par :

$$\forall x, y \in E, \quad (f^*(x) | y) = (x | f(y))$$

1. Montrer que pour toute forme linéaire φ sur E , il existe un unique $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (a | x)$$

2. Montrer que f^* est bien défini et que c'est un endomorphisme de E
3. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \|f^*(x)\| \leq \|x\|$$

puis que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x \Rightarrow f^*(x) = x$$

4. Montrer que

$$E = \ker(f - \text{Id}) \oplus^\perp \text{Im}(f - \text{Id})$$

Exercice 403: BEOS 4331 Mines MP 2018, entre autres ...

Soit E un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E .

Etudier la convergence (simple) de la suite de terme général $v_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} u^j$.

On commencera par montrer que $\text{Im}(u - \text{Id}) \oplus^\perp \ker(u - \text{Id}) = E$.

Exercice 404: BEOS 2685 Centrale MP 2016

On note $SO_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices spéciales orthogonales, et F_n le sous-espace vectoriel qu'elles engendrent.

Considérons le produit scalaire $(A | B) := \text{tr}({}^t AB)$.

1. Pour $n = 2$, montrer que

$$F_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

2. On suppose désormais $n \geq 3$.

(a) Montrer que :

$$\forall A \in A_n(\mathbf{R}), \quad \exp(A) \in SO_n(\mathbf{R})$$

(b) Montrer que $A_n(\mathbf{R})^\perp = S_n(\mathbf{R})$.

(c) Montrer que $F_n = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 405: RMS 294/235 X MP 2017

Déterminer toutes les formes linéaires $u : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ qui sont invariantes par conjugaison par toute matrice orthogonale, i.e. telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \forall P \in O_n(\mathbf{R}), \quad u(P^{-1}MP) = u(M)$$

Exercice 406

Idées d'exercices supplémentaires :

- Réduction des endomorphismes normaux.

3.12.2 Endomorphismes/matrices symétriques réels; théorème spectral**Exercice 407: ☉**

Réduire

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(et expliciter une base de réduction)

Exercice 408: ☉ BEOS 3486 Centrale PC 2017

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul. On pose $A = X^t X$.
Justifier que A est diagonalisable, et déterminer ses éléments propres.

Exercice 409: ☉ BEOS 4030 Mines-Télécom PT 2018

Soit A une matrice symétrique réelle telle que $A^3 = I_n$.
Déterminer A

Exercice 410: ☉ BEOS 3070 CCP PC 2017

Soit A une matrice symétrique réelle telle que $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur \mathbf{R} .
2. Soit λ une valeur propre de A . Montrer que $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.
3. En déduire A .

Exercice 411: BEOS 1538 Centrale PC 2015

Soit $A \in S_n(\mathbf{R})$ telle qu'il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^m = I_n$.

1. Montrer que $A^2 = I_n$.
2. On note u l'endomorphisme de \mathbf{R}^n canoniquement associé à A . Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme u ?

Exercice 412: Orthodiagonalisation simultanée

Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que deux endomorphismes symétriques de E qui commutent sont diagonalisables dans une même base orthonormée.
2. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes symétriques de E qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle les matrices des f_i sont toutes diagonales.

Exercice 413

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E , de trace nulle.

1. Montrer l'existence de $x \in E$ non nul tel que $(u(x) \mid x) = 0$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 414

On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne standard sur \mathbf{R}^n .

On pose, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\|A\| = \sup\{\|AX\|_2 \mid \|X\|_2 = 1\}$$

On admettra que l'on définit bien ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Montrer que

$$\|A\| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$$

où

$$\rho({}^tAA) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}({}^tAA)\}$$

Exercice 415: RMS 219/267 X MP 2017

Soit

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathbf{R} \\ M & \longmapsto \text{tr}(M^2) \end{cases}$$

Trouver la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont l'image par f est incluse dans \mathbf{R}_- .

Exercice 416: RMS 291/233 X MP 2017

On appelle état de $S_n(\mathbf{R})$ toute matrice de $S_n(\mathbf{R})$ de trace 1, à valeurs propres positives.

1. Caractériser (géométriquement) les états S tels que $S^2 = S$. On les appelle les états purs.
2. Montrer que l'ensemble des états est une partie convexe de $S_n(\mathbf{R})$.
3. Montrer que les points extrémaux de l'ensemble des états sont les états purs (un état est dit extrémal lorsqu'il ne peut s'exprimer comme barycentre à coefficients strictement positifs de deux états distincts).

3.13 Réduction d'isométries ($d = 2, 3$) et coniques

Exercice 417

Déterminer A la matrice dans la base canonique de \mathbf{R}^3 de la rotation d'axe dirigé par $(1, -2, 0)$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 418: BEOS 3441 Banque PT 2017

Soit $a > 0$. On considère la courbe définie par les conditions $x > 0$, $x^2 - y^2 = a^2$.

- Déterminer un paramétrage de cette courbe.
- Déterminer un paramétrage de la normale en tout point M de la courbe.
- On note C_M le cercle tangent à la courbe en M centré sur l'axe (Oy) .
Donner une équation de C_M .
- Soit $A(a\sqrt{2}, 0)$. Montrer que les tangentes à C_M passant par A sont orthogonales.

3.14 Calcul différentiel**3.14.1 Continuité****Exercice 419**

Étudier la continuité sur \mathbf{R}^2 de la fonction f définie par :

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+2y}{x^2-y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

7.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x-y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3.14.2 Différentiabilité et calculs de différentielles

Exercice 420: [Gav10, p. 33]

Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ est dérivable en tout point selon toutes les directions, mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 421

Déterminer les différentielles des applications suivantes :

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ A &\longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A &\longmapsto A^k \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \text{GL}_n(\mathbf{R}) \\ A &\longmapsto A^{-1} \end{aligned}$$

3.14.3 Extremas

Exercice 422

Soit f l'application définie sur \mathbf{R}^2 par

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3$$

La fonction f possède-t-elle des extremums locaux ?

Exercice 423: PT

Extremums locaux de $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x, y) \longmapsto (2 + \cos(x))(2 + \cos(y)).$$

Exercice 424

On note $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$ et f l'application définie sur D par

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - 3$$

Montrer que f possède des extremums globaux sur D et les déterminer.

Exercice 425

Soit $f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

Montrer que f admet un maximum global et le déterminer.

3.14.4 EDP ...**Exercice 426**

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$f + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a \quad (E)$$

où $a \in \mathbf{R}$.

Indication : effectuer le changement de variables $u = x + y, v = x - y$.

Exercice 427

Déterminer les fonctions $f : (\mathbf{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^2 vérifiant

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Indication : on effectuera le changement de variable $u = xy, v = \frac{x}{y}$.

Exercice 428

Soit $h \in \mathcal{C}^2(]-1, 1[, \mathbf{R})$. On pose, pour (x, y) convenable, $f(x, y) = h(\frac{y}{x})$.

Déterminer les applications h telles que f soit solution de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3}$$

3.14.5 Tout le reste

Exercice 429: Descente de gradient

Soit U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé de dimension finie E , c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], \quad (1-t)x + ty \in U$$

Une application $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ est dite convexe sur U si :

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

1. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ différentiable sur U . Montrer que f est convexe sur U si et seulement si

$$\forall x, y \in U, \quad df(x) \cdot (y - x) \leq f(y) - f(x) \quad (E)$$

Pour le sens réciproque, on posera $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ et on exprimera (E) en $(\gamma(t), x)$ et $(\gamma(t), y)$.

2. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ différentiable et convexe sur U . On suppose qu'elle admet un point critique $a \in U$. Que dire de a ?
3. Soit $A \in S_n(\mathbf{R})$ et $B \in \mathbf{R}^n$. On définit l'application $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$f(X) = \frac{1}{2}(AX \mid X) - (B \mid X),$$

où $(\cdot \mid \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien sur \mathbf{R}^n .

Montrer que f est convexe sur \mathbf{R}^n si et seulement si $A \in S_n^+$.

En déduire que, si A a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors f admet un minimum atteint en un unique point que l'on précisera.

Exercice 430: [Gav10, p. 35]

Soit

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto M^3 \end{cases}$$

Pour $M \in M_n(\mathbf{R})$ on note $\|M\| = \text{tr}(M^t M)$ et on admet l'on définit ainsi une norme sous-multiplicative sur $M_n(\mathbf{R})$ au sens où :

$$\forall M_1, M_2 \in M_n(\mathbf{R}), \quad \|M_1 M_2\| \leq \|M_1\| \|M_2\|$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $M_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que l'application $N : \mathcal{L}(M_n(\mathbf{R})) \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $N(u) = \sup_{M \neq 0} \frac{\|u(M)\|}{\|M\|}$ est bien définie et définit une norme sur $\mathcal{L}(M_n(\mathbf{R}))$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que :

$$N(df(M) - 3\text{Id}_{\mathcal{L}(M_n(\mathbf{R}))}) \leq 6\|M - I_n\| + 3\|M - I_n\|^2$$

4. Soit B la boule ouverte dans $M_n(\mathbf{R})$ de centre I_n et de rayon $\frac{1}{3}$. Montrer que pour tout $M \in B$,

$$N\left(\frac{1}{3}df(M) - \text{Id}_{\mathcal{L}(M_n(\mathbf{R}))}\right) < 1$$

et en déduire que $df(M)$ est un isomorphisme de $M_n(\mathbf{R})$ dans $M_n(\mathbf{R})$.

5. Pour $M \in B$ on pose $g(M) = f(M) - 3M$. Montrer que pour tous $M, P \in B$,

$$\|g(M) - g(P)\| \leq \frac{7}{3}\|M - P\|$$

6. En déduire que f est injective sur B .

Exercice 431: [Châ15]

On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ et on note E^* le dual de E . On pose :

$$D = \{d \in E^* \mid \forall f, g \in E, d(fg) = f(0)d(g) + g(0)d(f)\}$$

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^* .
2. Montrer que D n'est pas réduit à $\{0\}$.
3. Soit $d \in D$ et h une fonction constante. Que vaut $d(h)$?
4. Soit $f \in E$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Vérifier que $x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ appartient à E .

5. Soit $d \in D$. Etablir l'existence de $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall f \in E, \quad d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

6. Déterminer la dimension de D .

Exercice 432: [Châ15] Identité d'Euler

Soit Ω un cône ouvert^a de \mathbf{R}^2 (bon, disons un ouvert convexe) et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$.
On dit que f est homogène de degré $m \in \mathbf{N}$ lorsque :

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, \forall t > 0, \quad f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

1. On suppose f de classe \mathcal{C}^1 . Démontrer que f est m -homogène si et seulement si :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = mf.$$

2. On suppose f de classe \mathcal{C}^2 et homogène de degré m . Montrer que :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = m(m-1)f.$$

3. Déterminer les polynômes P à deux indéterminées vérifiant :

$$x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} = 4P.$$

a. un cône est une partie X telle que pour tout $t > 0$ et $x \in X$, $tx \in X$.

Exercice 433: BEOS 4548 Mines MP 2018

On munit \mathbf{R}^n de la norme euclidienne canonique.
Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ différentiable, telle que sa différentielle en tout point est injective, et vérifiant

$$\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective. On introduira pour cela l'application $g : x \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

Exercice 434: Le même, version détaillée

On munit \mathbf{R}^n de la norme euclidienne canonique.
Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ différentiable, telle que sa différentielle en tout point est injective, et vérifiant

$$\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective. On introduit pour cela l'application $g : x \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

1. Justifier que g est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que g admet un point critique $x_0 \in \mathbf{R}^n$.
3. Justifier que, pour tout $y \in \mathbf{R}^n$, il existe $h \in \mathbf{R}^n$ tel que $df(x_0) \cdot h = y$.
4. Conclure.

Exercice 435: [Châ15]

Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^1 , k -contractante ($0 < k < 1$). On pose :

$$g : x \mapsto x + f(x).$$

Montrer que g est bijective et que sa différentielle en tout point est inversible.

Exercice 436: RMS 617/742 Mines MP 2017

1. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{tA} \in O_n(\mathbf{R})$$

2. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbf{R})$ en I_n .

3. Pour $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ quelconque, déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbf{R})$ en Ω .

Exercice 437: [Châ15]

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on pose $f(M) = (\text{tr}(M), \text{tr}(M^2), \dots, \text{tr}(M^n))$.

1. Montrer que f est différentiable et calculer $df(M) \cdot H$ pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que le rang de $df(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M .

3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le polynôme minimale égale le polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3.15 Équations différentielles

3.15.1 Pratique

Equations scalaires

Exercice 438: [Fre10b]

Résoudre l'équation différentielle suivante sur \mathbf{R}

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1+x^2}$$

Exercice 439

Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle :

$$y'' + y = \tan^2(t)$$

Systemes différentiels

Exercice 440

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

Exercice 441: A la limite du programme

Résoudre sur \mathbf{R} le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= -x + 3y + e^t \\ y' &= -2x + 4y \end{cases}$$

Exercice 442: BEOS 8133 Mines MP 2024

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= (2-t)x(t) + (t-1)y(t) \\ y'(t) &= 2(1-t)x(t) + (2t-1)y(t) \end{cases}$$

Exercice 443: [Des01]

Soit $A \in M_2(\mathbf{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{Sp}(A)$ pour que toutes les solutions du système différentiel $X' = AX$ tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

3.15.2 Exercices pratiques plus approfondis**Exercice 444: BEOS 4390 CCP PC 2018**

Le but de l'exercice est de déterminer les solutions sur \mathbf{R}_+^* de

$$xy'' + xy' - y = 0 \quad (E)$$

- Déterminer un réel α tel que $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E) sur \mathbf{R}_+^* .
- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ converge et que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ diverge.
- Soit $G : x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt$. Etudier les variations de G sur \mathbf{R}_+^* .
- Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbf{R}_+^* et $s : x \mapsto xf(x)$.
Montrer que s est solution de (E) si et seulement si f' est solution d'une équation du premier ordre que l'on précisera.
- Résoudre cette équation du premier ordre sur \mathbf{R}_+^* .
- Exprimer les solutions de (E) sur \mathbf{R}_+^* à l'aide la fonction G .

Exercice 445: [Châ15]

Soit f une solution définie sur \mathbf{R} de $(E) : y'' - (x^4 + 1)y = 0$, telle que $f(0) = f'(0) = 1$.

1. Justifier l'existence de f .
2. Montrer que $g = f^2$ est convexe.
3. Montrer que $f \geq 1$ sur \mathbf{R}_+ .
4. $t \mapsto \frac{1}{g(t)}$ est-elle intégrable sur \mathbf{R}_+ ?
5. Montrer que $h : x \mapsto f(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{g(t)}$ est solution de l'équation différentielle (E) .

Exercice 446: [Châ15]

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$.

1. On pose $g = f'' + f$. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = f(0) \cos(x) + f'(0) \sin(x) + \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt$$

2. On suppose que $f'' + f \geq 0$ sur \mathbf{R} . Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

3.15.3 Théoriques**Exercice 447: [Des01]**

Soit f une fonction bornée et uniformément continue sur \mathbf{R}_+ .

On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, (E_n) l'équation :

$$y' - ny = -nf$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution bornée sur \mathbf{R}_+ , que l'on notera φ_n .
2. Montrer que φ_n est uniformément continue sur \mathbf{R}_+ .
3. Montrer que (φ_n) converge uniformément vers f sur \mathbf{R}_+ .

Exercice 448: BEOS 4532 Mines MP 2018

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = a$$

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

Exercice 449

Soit $\alpha > 0$ et $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) + \alpha f(t) = 0$$

Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Exercice 450: BEOS 2270 Mines MP 2016

1. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ et $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) + \alpha f(t) = 0$$

Montrer que, si $\Re(\alpha) > 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

2. Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f''(t) + f'(t) + f(t) = 0$$

Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

3. Généraliser.

Exercice 451

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + q(t)y = 0$ où $q : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue strictement négative sur \mathbf{R} .

1. Montrer que la seule solution réelle bornée de (E) sur \mathbf{R} est la fonction nulle.
2. Montrer qu'une solution non nulle s'annule au plus une fois sur \mathbf{R} .

Exercice 452: [Châ15]

Soit $q : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ continue et $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \geq 0$, $q(x) \geq \alpha$.

Démontrer qu'il existe une solution f de l'équation différentielle $y'' - q(x)y = 0$ sur \mathbf{R}_+ telle que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Exercice 453: [Châ15]

On munit \mathbf{R}^n de la norme euclidienne. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que toutes les solutions de $Y' = AY$ soient toutes de norme constante.

Exercice 454: [Gou08] Théorème de Floquet

On considère un système différentiel sur \mathbf{C}^n $(E) : Y' = A(t)Y$ où $A : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est une fonction continue T -périodique.

Montrer qu'il existe une solution non nulle V de (E) et $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad V(t+T) = \lambda V(t)$$

3.15.4 Wronskien et Grönwall

Exercice 455: EDO sur le Wronskien, et calcul du wronskien

- Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $p, q : I \rightarrow \mathbf{C}$ continues.
On considère l'équation $(E) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.
Soit deux solutions u et v de (E) sur (I) . Déterminer une équation différentielle vérifiée par le wronskien de u et v , et en déduire une expression du wronskien en fonction de sa valeur en un point arbitraire de I .
- Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ continue.
On considère le système différentiel $(E) : Y' = A(t)Y$.
Soit y_1, \dots, y_n n solutions de (E) sur (I) . Déterminer une équation différentielle vérifiée par le wronskien des y_1, \dots, y_n , et en déduire une expression du wronskien en fonction de sa valeur en un point arbitraire de I .

Exercice 456

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + q(t)y = 0$ où $q : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue intégrable sur \mathbf{R}_+ .

- Soit y une solution bornée de (E) . Etudier le comportement de $y'(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.
- Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

Exercice 457: Zéros entrelacés

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ sur un intervalle I de \mathbf{R} et où $p, q : I \rightarrow \mathbf{R}$ sont continues sur I .

- Montrer qu'une solution non nulle f de (E) a un nombre fini de zéros dans tout segment de I .
- Soit f et g deux fonctions qui forment une base de solutions de (E) sur I . Soit $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de f . Montrer que g s'annule en un unique point de $]t_1, t_2[$.

3.15.5 Cas général ou équations non linéaires (HP)**Exercice 458: Zéros isolés - POSABLE EN ADAPTANT AU PROGRAMME**

Soit une équation différentielle $(E) : y'' = F(t, y, y')$ telle que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, et qui admet la fonction nulle pour solution (c'est le cas si elle est linéaire, ou, plus généralement, si $F(t, 0, 0) = 0$).

Montrer que toute solution non identiquement nulle a ses zéros isolés.

Exercice 459: HP - NON ADAPTABLE AU PROGRAMME

Soit I un intervalle de \mathbf{R} , $F : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ deux solutions de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$ sur I . On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$.

Montrer que pour tout $t \in I$, $f(t) < g(t)$.

Exercice 460: HP - NON ADAPTABLE AU PROGRAMME

Soit $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , T -périodique en la variable de temps, y une solution de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$ sur \mathbf{R} .

Montrer que la suite $(y(kT))_{k \in \mathbf{N}}$ est strictement monotone ou constante, et que, dans ce dernier cas, y est une solution T -périodique.

Exercice 461

Montrer que pour l'équation différentielle sur \mathbf{R} $y' = \sqrt{|y|}$, il n'y a pas unicité au problème de Cauchy.

3.16 Courbes et surfaces

3.16.1 Géométrie dans le plan, courbes

Exercice 462: BEOS 1444 Banque PT 2015

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit un cercle de rayon R tangent à l'axe des abscisses en un point T d'abscisse t et M le point d'intersection du cercle avec l'autre tangente au cercle issue de O .

1. Tracer la figure.
2. Déterminer les coordonnées de M .
3. Etudier la trajectoire de M quand t varie.

Exercice 463: BEOS 4321 Banque PT 2018

Soit Γ un cercle $A, N \in \Gamma$, et H le projeté de A sur la tangente à Γ en un point M .

1. Paramétrer le problème et calculer les coordonnées de H .
2. Déterminer l'aire maximale du triangle MHN .

Exercice 464: BEOS 1413 Banque PT 2015

Soit l'ensemble de points $\Gamma : x^2 - y^2 = 1$.

1. Tracer les asymptotes à cette courbe.
2. Tracer la courbe.
3. Déterminer une paramétrisation $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ à l'aide des fonctions $\cosh(t)$ et $\sinh(t)$.
4. Déterminer une équation cartésienne d'une normale à la courbe au point de paramètre t .
5. En déduire la développée de $\gamma(t)$.
6. Faire l'étude et tracer la développée de $\gamma(t)$.

Exercice 465

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \ln(x)$ en lequel le rayon de courbure est minimum en valeur absolue.

Exercice 466: [Fre10b]

Soit (C) la courbe en coordonnées cartésiennes donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$$

où $t \in \mathbf{R}$.

Etude et représentation. Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à (C) .

Exercice 467

Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(\cos(x))$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Calculer l'abscisse curviligne s quand 0 est l'origine des abscisses curvilignes et l'orientation celle des x croissants.
2. Donner une relation entre R et s .
3. Tracer (Γ) et sa développée.

3.16.2 Surfaces**Exercice 468**

Déterminer les plans à la fois tangents à (S) d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et contenant la droite (D) de système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = z + 2 \end{cases}$$

Exercice 469

On note (S) la surface d'équation :

$$x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$$

1. Déterminer les plans tangents à (S) qui sont parallèles au plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. En chacun des points de contact obtenus, étudier localement la position relative de la surface (S) et de son plan tangent.
3. (Bonus) Etudier la position relative globale de la surface (S) et du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3.17 Inclassables, planches d'oraux ou Python

Exercice 470: BEOS 4555 CCP PC 2018

- (Exercice majeur)

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , et E_1 le sous-espace vectoriel constitué des fonctions continues 1-périodiques de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

On définit, pour f dans E , la fonction $u(f)$ par :

$$u(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E .
2. (a) Montrer que, pour $h_a : t \mapsto e^{at}$, on a $u(h_a) = K_a h_a$ où K_a est une constante valant $\frac{e^a - 1}{a}$ si $a \neq 0$. Préciser la valeur de K_a si $a = 0$.
(b) On pose, pour $a \in \mathbf{R}^*$, $\varphi(a) = \frac{e^a - 1}{a}$. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur \mathbf{R} .

Montrer que tout réel strictement positif est valeur propre de u .

3. (a) Montrer que $f \in \ker(u)$ si et seulement si $f \in E_1$ et $\int_0^1 f(t) dt = 0$.
(b) Montrer que $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E_1 .
(c) Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $c_k : t \mapsto \cos(2\pi kt)$.
Montrer que, si $k \neq l$, alors $(c_k | c_l) = 0$.
(d) Montrer que $\ker(u)$ n'est pas de dimension finie.

- (Exercice mineur)

On pose, pour $x > 0$,

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx)}$$

1. Sur quel intervalle G est-elle bien définie? Sur quel intervalle est-elle continue?
2. Montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 et calculer sa dérivée.

Exercice 471: BEOS 4157 CCP PC 2018

- (Exercice majeur)

1. Soit

$$g : \begin{cases}]-\infty, 0[& \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x \exp \frac{1}{x} + \exp(x) \end{cases}$$

Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.

2. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto x \exp y + y \exp(x) \end{cases}$$

Montrer que, si (x, y) est un point critique, alors $x < 0$, $xy = 1$ et $g(x) = 0$.

Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f .

3. Soit $a \in \mathbf{R}^*$ et $h : x \mapsto f(-1 + ax, -1 + x)$.

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $h(x)$ en 0.

4. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.

5. Notons $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$.

Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

- (Exercice mineur)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension impaire.

1. Si λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, que vaut $f^n(x)$?

2. Supposons que $f^3 - f^2 + f - \text{Id} = 0$.

Montrer que f admet une unique valeur propre réelle.

Exercice 472: BEOS 3487 Centrale PC 2017

On pose $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe à l'aide de Python.

2. Pour $a, b \in \mathbf{N}$ tels que $0 < a < b$, résoudre l'équation $a^b = b^a$.

3. Montrer que pour tout $x \geq e$, l'équation $x^y = y^x$ d'inconnue $y \in]1, e]$ admet une unique solution, notée $\phi(x)$.

4. Montrer que la fonction $\phi : [e, +\infty[\rightarrow]1, e]$ ainsi définie est continue, puis de classe \mathcal{C}^∞ .

5. Soit $t > 0$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}$$

6. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$\psi : x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^n$$

Tracer le graphe de ψ avec Python.

Exercice 473: BEOS 3484 Centrale PC 2017

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n \sqrt{1-t}}$$

et

$$J_n = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{(1+t)^n \sqrt{1-t}}$$

1. Montrer que les deux intégrales sont bien définies pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Tracer I_n pour $1 \leq n \leq 50$.
3. Etudier la monotonie et la convergence de (I_n) .
Déterminer sa limite.
4. Tracer les points de coordonnées $(\ln(n), \ln(I_n))$ pour $100 \leq n \leq 1000$.
5. Conjecturer pour quel(s) entier(s) naturel(s) α la suite de terme général $n^\alpha I_n$ converge vers une limite non nulle.
6. Tracer les suites de termes généraux $n^\alpha I_n$ et $n^\alpha J_n$ pour $1 \leq n \leq 50$. Que peut-on en déduire?
7. Démontrer que

$$n^\alpha (I_n - J_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

8. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$$

Bibliographie

- [Amr09] Mohammed AMRANI. *Intégrale de Riemann théorie et pratique : avec exercices corrigés*. Paris : Hermann, 2009. ISBN : 2705669248.
- [Bal09] Stéphane BALAC. *Algèbre et analyse cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009. ISBN : 2880748283.
- [Châ15] Philippe CHÂTEAUX. *Exercices*. 2015.
- [Des01] Claude DESCHAMPS. *Mathématiques 2e année : cours et exercices corrigés, 2e année MP, PC, PSI*. Paris : Dunod, 2001. ISBN : 2100054120.
- [Fab] Lycée FABERT. *Polycopiés d'exercices de PSI**.
- [Fre10a] Julien FRESLON. *Mathématiques exercices incontournables : MPSI-PCSI-PTSI*. Paris : Dunod, 2010. ISBN : 2100547674.
- [Fre10b] Julien FRESLON. *Mathématiques exercices incontournables : PC, PSI, PT*. Paris : Dunod, 2010. ISBN : 2100534246.
- [Gau09] Christian GAUTIER. *Mathématiques tout-en-un : ECS 2e année : cours et exercices corrigés*. Paris : Dunod, 2009. ISBN : 978-2-10-053975-8.
- [Gav10] Sylvie GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles cours et exercices corrigés*. Paris : Dunod SMAI, 2010. ISBN : 210053050X.
- [Gou08] Xavier GOURDON. *Analyse mathématiques pour MP*. Paris : Ellipses, 2008. ISBN : 2729837590.
- [Lar12] Cécile LARDON. *Mathématiques : méthodes et exercices ECE 2e année*. Paris : Dunod, 2012. ISBN : 2100576690.
- [Mer99] Xavier MERLIN. *MéthodiX analyse : 300 méthodes, 250 exercices corrigés*. Paris : Ellipses, 1999. ISBN : 2729899014.
- [Mon08] MONIER. *Les méthodes et exercices de mathématiques MPSI*. Paris : Dunod, 2008. ISBN : 2100516760.
- [Mon09] MONIER. *Mathématiques méthodes et exercices : PC-PSI-PT*. Paris : Dunod, 2009. ISBN : 2100534211.
- [Pel18] Rémi PELLERIN. *Exercices de colle*. 2018.
- [Ram] Edmond RAMIS.
- [Riv78] Jacques RIVAUD. *Exercices d'algèbre linéaire : à l'usage des étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques et du premier cycle des universités*. Paris : Vuibert, 1978. ISBN : 2711721507.
- [Rou15] Vidian ROUSSE. *Mathématiques : exercices incontournables : ECS 1re année*. Paris : Dunod, 2015. ISBN : 2100712284.
- [Sau] François SAUVAGEOT. *Polycopiés d'exercices, de cours, d'oraux ...*